**Teste de Matemática A**

2021 / 2022

Teste N.º 3

**Matemática A**

Duração do Teste: 90 minutos

**11.º Ano de Escolaridade**

Nome do aluno: ____________________________________________ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

**1.** Considere a expressão $A(\beta) = \frac{\cos^2\beta}{1-\text{sen}\,\beta}$.

Para todo o $\beta$ onde a igualdade tem significado, podemos concluir que $A(\beta)$ é igual a:

**(A)** $\text{sen}\,\beta$ **(B)** $1 + \text{sen}\,\beta$ **(C)** $\cos\beta$ **(D)** $1 + \cos\beta$

**2.** Seja $f$ a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \text{tg}\,x\,\text{sen}\,x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ 2\,\text{sen}\,x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

O argumento da função está expresso em radianos.

**2.1.** Em qual das opções se encontra o conjunto dos zeros da função $f$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$?

**(A)** $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, 0\right\}$

**(B)** $\left\{0, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

**(C)** $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, 0, \pi\right\}$

**(D)** $\left\{0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

**2.2.** Considere a representação gráfica da função $f$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Sabe-se que:

- no primeiro quadrante o gráfico da função $f$ interseta a bissetriz dos quadrantes ímpares num único ponto – seja $A$ esse ponto;
- no segundo quadrante o gráfico da função $f$ interseta a bissetriz dos quadrantes pares num único ponto – seja $B$ esse ponto;

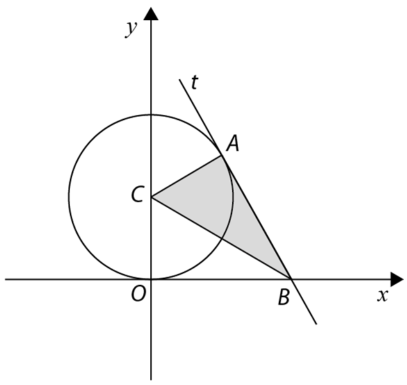
Qual é a distância entre os pontos $A$ e $B$?

Resolva esta questão recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar as coordenadas dos pontos $A$ e $B$, com aproximação às centésimas;
- apresentar o valor pedido, com aproximação às décimas.

**3.** Na figura estão representados, num referencial ortonormado $Oxy$, uma circunferência, a reta $t$ tangente à circunferência e o triângulo $[ABC]$.




Sabe-se que:

- a circunferência tem centro $C$ e pode ser definida pela condição $x^2 + y^2 - 6y = 0$;
- o ponto $A$ pertence à circunferência, encontra-se no 1.º quadrante e tem ordenada $4$;
- a reta $t$ é tangente à circunferência no ponto $A$;
- o ponto $B$ é o ponto de interseção da reta $t$ com o eixo das abcissas.

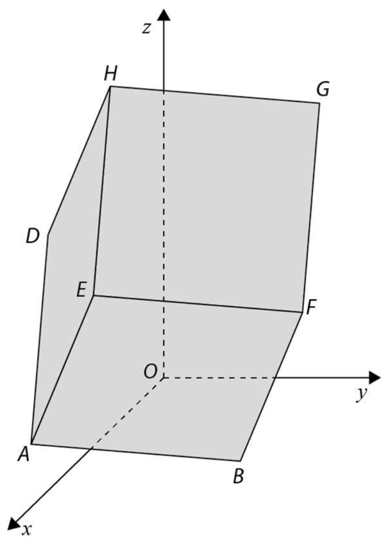
**3.1.** Determine a inclinação da reta $t$.

Apresente o resultado em graus, com aproximação às décimas.

**3.2.** Determine o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{N}$.

**4.** Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto $C$ não está representado na figura).




Sabe-se que:

- o ponto $A$ tem coordenadas $(11, -1, 2)$;
- o ponto $B$ tem coordenadas $(8, 5, 0)$;
- o ponto $D$ tem coordenadas $(5, -3, 5)$;
- o ponto $E$ tem coordenadas $(13, 2, 8)$.

**4.1.** Defina o plano $ABE$ por uma equação cartesiana.

**4.2.** Defina a reta $AC$ por uma equação vetorial.

**4.3.** Qual das condições seguintes define a superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo?

**(A)** $\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}$

**(B)** $\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{147}}{2}$

**(C)** $\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}$

**(D)** $\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{147}}{2}$

**4.4.** Seja $\alpha$ o plano que contém a origem do referencial e é perpendicular à reta $OE$ e seja $P$ o ponto de interseção do plano $\alpha$ com a reta $BF$. Determine a distância do ponto $P$ ao plano $xOy$. Apresente o resultado na forma de dízima.

**5.** Considere, num referencial o.n. $Oxy$, a reta $r$ de equação $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Seja $\alpha$ a inclinação da reta $r$, em radianos.

Qual é o valor de $\operatorname{tg}(2022\pi + \alpha) + \cos^2(2021\pi + \alpha)$?

**(A)** $\frac{37}{30}$ **(B)** $\frac{13}{9}$ **(C)** $-\frac{17}{30}$ **(D)** $-\frac{7}{9}$

**6.** Considere as sucessões $(u_n)$ e $(v_n)$ definidas por:

$$u_n = \begin{cases} n & \text{se} \quad n \leq 2022 \\ -1 & se \quad n > 2022 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

**(A)** Ambas as sucessões são limitadas.

**(B)** Ambas as sucessões são não limitadas.

**(C)** Apenas a sucessão $(u_n)$ é limitada.

**(D)** Apenas a sucessão $(v_n)$ é limitada.

**7.** Considere duas progressões, uma aritmética e uma geométrica, das quais se sabe que:

- o primeiro termo da progressão aritmética é igual ao primeiro termo da progressão geométrica;
- a razão da progressão geométrica é 2;
- a soma dos quatro primeiros termos da progressão aritmética é igual a 75;
- a soma dos quatro primeiros termos da progressão geométrica é também igual a 75.

Determine a razão da progressão aritmética.

**- FIM -**

**COTAÇÕES**

| **Item** | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | | |
| **1.** | **2.1.** | **2.2.** | **3.1.** | **3.2.** | **4.1.** | **4.2.** | **4.3.** | **4.4.** | **5.** | **6.** | **7.** | |
| 10 | 10 | 25 | 20 | 20 | 20 | 20 | 10 | 25 | 10 | 10 | 20 | **200** |

## TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

**1. Opção (B)**

$$\frac{\cos^2\beta}{1-\operatorname{sen}\beta}=\frac{\cos^2\beta\,(1+\operatorname{sen}\beta)}{(1-\operatorname{sen}\beta)(1+\operatorname{sen}\beta)}=\frac{\cos^2\beta\,(1+\operatorname{sen}\beta)}{1-\operatorname{sen}^2\beta}=\frac{\cos^2\beta\,(1+\operatorname{sen}\beta)}{\cos^2\beta}=1+\operatorname{sen}\beta$$

**2.**

**2.1. Opção (B)**

Em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$: $\quad \operatorname{tg}x\ \operatorname{sen}x=0$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=0 \quad \vee \ \operatorname{sen}x=0$

$\Leftrightarrow x=k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$

Logo, neste intervalo, $f$ tem apenas um zero: $0$

Em $]0,2\pi]$: $\quad 2\operatorname{sen}x+1=0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$

Para $k=1$, tem-se que $x=\frac{11\pi}{6}$ e $x=\frac{7\pi}{6}$.

Logo, neste intervalo, os zeros de $f$ são $\frac{11\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$.

Assim, o conjunto dos zeros da função $f$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ é $\left\{0,\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\right\}$.

**2.2.** Colocando na calculadora:

$y_1=\operatorname{tg}x\ \operatorname{sen}x,\ \ x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$

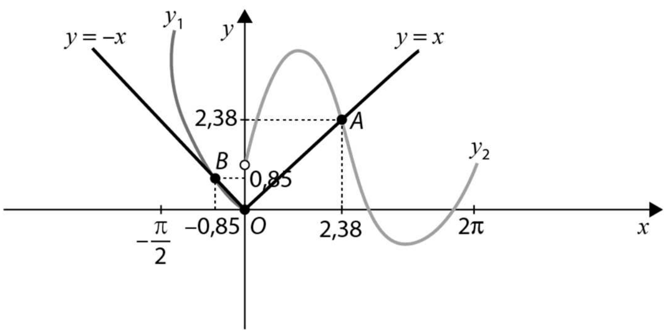
$y_2=2\operatorname{sen}x+1,\ \ x\in\,]0,2\pi]$

$y_3=x$

$y_4=-x$

$A(2{,}38;2{,}38)$

$B(-0{,}85;0{,}85)$




$d(A,B)=\sqrt{(2{,}38-(-0{,}85))^2+(2{,}38-0{,}85)^2}=\sqrt{12{,}7738}\approx 3{,}6$

**3.**

**3.1.** $x^2+y^2-6y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-6y+9=9 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=9$

O centro da circunferência é o ponto $C$ e tem coordenadas $(0,3)$.

Como o ponto $A$ pertence à circunferência e tem ordenada $4$, então $A(x,4)$.

$x^2+(4-3)^2=9 \Leftrightarrow x^2+1=9 \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{8}$

E, como $x > 0$, vem que $A(\sqrt{8}, 4)$, ou seja, $A(2\sqrt{2}, 4)$.

Assim, o declive da reta *AC* é $m_{AC} = \frac{4-3}{2\sqrt{2}-0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e o declive da reta $t$, perpendicular à reta *AC*, é $m_t = -\frac{1}{m_{AC}} = -2\sqrt{2}$.

Seja α a inclinação da reta $t$: $m_t = \text{tg}\,\alpha$, ou seja, $\text{tg}\,\alpha = -2\sqrt{2}$ e $\alpha = \text{tg}^{-1}(-2\sqrt{2})$, logo $\alpha \approx 109{,}5°$.

**3.2.** O triângulo $[ABC]$ é retângulo em $A$.

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2}$.

Determinação das coordenadas do ponto $B$:

$t: y = -2\sqrt{2}\,x + b$

Como $A(2\sqrt{2}, 4) \in t$:

$4 = -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + b \Leftrightarrow 4 = -8 + b$

$\Leftrightarrow b = 12$

$t: y = -2\sqrt{2}\,x + 12$

Como o ponto $B$ pertence à reta $t$ e tem ordenada $0$:

$0 = -2\sqrt{2}\,x + 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{6\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$

$B(3\sqrt{2}, 0)$

$\overline{AB} = \sqrt{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 + (0-4)^2} = \sqrt{2+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\overline{AC} = 3$ (raio da circunferência)

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

**4.**

**4.1.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 5, 0) - (11, -1, 2) = (-3, 6, -2)$

$\overrightarrow{AE} = E - A = (13, 2, 8) - (11, -1, 2) = (2, 3, 6)$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor, não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 6, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 6b - 2c = 0 \\ 2a + 3b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6b-2c}{3} \\ 2\left(\frac{6b-2c}{3}\right) + 3b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 12b - 4c + 9b + 18c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\phantom{21b + 14c = 0}} \\ 21b + 14c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\phantom{c = -\frac{21}{14}b}} \\ c = -\frac{21}{14}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6b - 2\times\left(-\frac{3}{2}b\right)}{3} \\ c = -\frac{3}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6b+3b}{3} \\ \overline{\phantom{a = \frac{6b+3b}{3}}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ c = -\frac{3}{2}b \end{cases}$$

Seja, por exemplo, $b = 2$, $\vec{n}(6, 2, -3)$.

Assim, uma equação cartesiana do plano $ABE$ é da forma $6x + 2y - 3z + d = 0$ e, como $B(8, 5, 0)$ pertence ao plano, vem que $6 \times 8 + 2 \times 5 - 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -58$.

Equação cartesiana do plano $ABE$: $6x + 2y - 3z - 58 = 0$

**4.2.** $C = D + \overrightarrow{AB} = (5, -3, 5) + (-3, 6, -2) = (2, 3, 3)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 3, 3) - (11, -1, 2) = (-9, 4, 1)$

Uma equação vetorial da reta $AC$ pode, então, ser $(x, y, z) = (2, 3, 3) + k(-9, 4, 1), k \in \mathbb{R}$.

**4.3. Opção (C)**

Pretende-se uma condição que defina a superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo, logo o seu centro é equidistante de quaisquer destes vértices, em particular, dos vértices $C$ e $E$.

O centro é o ponto médio de $[CE]$:

$C = (2, 3, 3)$ e $E = (13, 2, 8)$

Centro $= \left(\frac{2+13}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{3+8}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$

Como $[CE]$ é um diâmetro da superfície esférica:

raio $= \frac{d(C,E)}{2} = \frac{\sqrt{(13-2)^2+(2-3)^2+(8-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{121+1+25}}{2} = \frac{\sqrt{147}}{2}$

Portanto, a condição pedida é $\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{147}}{2}\right)^2$, ou seja,

$\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}$.

**4.4.** $\overrightarrow{OE} = E - O = (13, 2, 8) - (0, 0, 0) = (13, 2, 8)$

O plano $\alpha$ é perpendicular à reta $OE$, logo é definido por uma equação do tipo $13x + 2y + 8z + d = 0$. Como a origem $O$ pertence ao plano $\alpha$, então $d = 0$.

Logo, o plano $\alpha$ pode ser definido por $13x + 2y + 8z = 0$.

$\overrightarrow{AE} = E - A = (2, 3, 6)$

Equação vetorial da reta $BF$: $(x, y, z) = (8, 5, 0) + k(2, 3, 6), k \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico da reta $BE$ é do tipo$(8 + 2k, 5 + 3k,\ 6k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano $\alpha$, obtemos:

$$13(8 + 2k) + 2(5 + 3k) + 8(6k) = 0 \Leftrightarrow 104 + 26k + 10 + 6k + 48k = 0$$
$$\Leftrightarrow 80k = -114$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{114}{80}$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{57}{40}$$

Para $k = -\frac{57}{40}$, obtemos o ponto $P$ de coordenadas $\left(8 + 2 \times \left(-\frac{57}{40}\right), 5 + 3 \times \left(-\frac{57}{40}\right), 6 \times \left(-\frac{57}{40}\right)\right) = \left(\frac{103}{20}, \frac{29}{40}, -\frac{171}{20}\right)$.

Logo, a distância do ponto $P$ ao plano $xOy$ é o valor absoluto da cota de $P$, isto é, $\frac{171}{20}$, ou seja, $8{,}55$.

**5. Opção (A)**

A equação reduzida da reta $r$ é $y = \frac{1}{3}x + 1$, e $\alpha$ é a sua inclinação, logo sabemos que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Como $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{10}$$

$$\operatorname{tg}(2022\pi + \alpha) + \cos^2(2021\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) + \cos^2(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) + (-\cos\alpha)^2 =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{9}{10} =$$

$$= \frac{37}{30}$$

**6. Opção (A)**

A sucessão $(u_n)$ é limitada, pois $-1 \leq u_n \leq 2022, \forall n \in \mathrm{IN}$.

Observe-se que:

- se $n \leq 2022$, então $1 \leq u_n \leq 2022$;
- se $n > 2022$, então $u_n = -1$.

A sucessão $(v_n)$ é limitada, pois $-1 \leq v_n \leq 1, \forall n \in \mathrm{IN}$.

Observe-se que:

- se $n$ é par, então $v_n = \frac{1}{n}$ e $0 < \frac{1}{n} \leq 1$;
- se $n$ é ímpar, então $v_n = -\frac{1}{n}$ e $-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$.

**7.** Seja $(u_n)$ a progressão geométrica de razão $2$ e $(v_n)$ a progressão aritmética de razão $r$.

Sabe-se que $\underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}_{\frac{1-2^4}{1-2} \times u_1} = 75$ e que $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 75$.

Assim:

$$\frac{1-2^4}{1-2} \times u_1 = 75 \Leftrightarrow \frac{-15}{-1} \times u_1 = 75 \Leftrightarrow u_1 = 5$$

E, como $u_1 = v_1$, vem que $\underbrace{5 + v_2 + v_3 + v_4}_{\frac{5+v_4}{2} \times 4} = 75$.

Assim:

$$\frac{5+v_4}{2} \times 4 = 75 \Leftrightarrow 5 + v_4 = \frac{75}{2} \Leftrightarrow v_4 = \frac{75}{2} - 5 \Leftrightarrow v_4 = \frac{65}{2}$$

$$v_4 = v_1 + 3r \Leftrightarrow \frac{65}{2} = 5 + 3r \Leftrightarrow r = \frac{55}{6}$$

A razão da progressão aritmética é $\frac{55}{6}$.