

Teste N.º 1

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$$\frac{\alpha r^2}{2} \quad (\alpha \text{ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r \text{ – raio})$$

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;

g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\operatorname{cos}(a + b) = \operatorname{cos} a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta) \quad \text{ou} \quad (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)}$$

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \operatorname{cos} u$$

$$(\operatorname{cos} u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\operatorname{cos}^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes (espadas, copas, ouros e paus).

Em cada naipe há 13 cartas: um ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do dois ao dez).

- 1.1. Utilizando apenas as doze figuras, quantas sequências de doze cartas, com os reis todos juntos e as damas todas juntas, é possível construir?

- 1.2. Retirando ao acaso, simultaneamente, cinco cartas de um baralho completo, quantos conjuntos distintos de cinco cartas com, no máximo, dois ases é possível formar?

- 1.3. O André, o António, o Pedro e o Rodrigo vão escolher, cada um e em segredo, uma carta do naipe de paus completo.

Qual é a probabilidade de exatamente dois deles escolherem o rei de paus?

(A) $\frac{3}{65}$

(B) $\frac{144}{28\,561}$

(C) $\frac{792}{28\,561}$

(D) $\frac{864}{28\,561}$

2. Considere todos os números naturais de seis algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, dois algarismos 2, dois algarismos 4 e um algarismo 5.

Determine quantos destes números são superiores a 220 000.

3. Uma determinada linha do triângulo de Pascal tem exatamente 13 elementos.

Escolhem-se ao acaso dois desses 13 elementos.

Qual é a probabilidade de se escolher dois números cuja soma seja igual a 13?

(A) $\frac{1}{39}$

(B) $\frac{2}{39}$

(C) $\frac{4}{39}$

(D) 0

4. Considere o desenvolvimento de $(a + 2x)^6$, com $a \in \mathbb{R}$.

Sabendo que o coeficiente do termo em x^3 é igual a -160 , determine o valor da constante a .

5. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,3$
- $P(B) = 0,5$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4$

Determine o valor da probabilidade condicionada $P(\bar{B}|(A \cup B))$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. Um saco contém nove cartões, numerados de 1 a 9 e indistinguíveis ao tato.

Retiraram-se todos os cartões do saco, um a um, e colocaram-se em fila numa mesa.

Qual é a probabilidade de os números inscritos nos três primeiros cartões serem primos?

- (A) $\frac{5}{42}$ (B) $\frac{1}{21}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{5}{21}$

7. Um grupo de n amigos, com $n \geq 3$, estão a combinar um jantar. Para tal, estão a decidir qual é o melhor dia da semana para o realizar. Cada um escolhe, de forma aleatória, um dos sete dias da semana.

Qual é a probabilidade de exatamente três dos amigos escolherem a quinta-feira?

- (A) $\frac{6^{n-3}}{7^n}$ (B) $\frac{{}^n A_3}{n^7}$ (C) $\frac{{}^n C_3 \times 6^{n-3}}{{}^7 A'_n}$ (D) $\frac{{}^n C_3}{{}^n A'_7}$

8. Considere o problema: “Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, um algarismo 1, dois algarismos 8 e três algarismos 9. Determine quantos destes números são pares.”

${}^6 C_2 \times {}^4 C_3 + 5^2 \times {}^4 C_3$ é uma resposta correta ao problema.

Numa pequena composição, explique o raciocínio que conduziu à resposta.

9. Considere a expressão:

$$\frac{(n+1)! - {}^n A_n}{(n-1)!}, n \in \mathbb{N}$$

Para qualquer valor de n , a expressão anterior é igual a:

- (A) ${}^n C_n$ (B) ${}^n C_1 \times {}^n C_{n-1}$
(C) ${}^n C_1$ (D) ${}^n C_1 + {}^n C_{n-1}$

10. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que A e B têm ambas probabilidades não nulas e que $\frac{P(A|B)}{P(B)} = 1$.

Prove que:

$$P(A \cup \overline{B}) = (P(B))^2 - P(B) + 1$$

11. Num instituto europeu de investigação trabalham cientistas de várias nacionalidades, sendo que alguns deles são portugueses.

Sabe-se, ainda, que:

- 40% são cientistas da área da Matemática;
- em cada cinco cientistas da área da Matemática, três não são portugueses.

Escolhendo, ao acaso, um cientista deste instituto, qual é a probabilidade de ele não ser português ou não ser da área da Matemática?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

12. Nas férias de verão, um grupo de 15 amigos decidiu alugar três autocaravanas de modelos diferentes. Qualquer um dos amigos pode conduzir e decidiram entre si que cada autocaravana levaria no mínimo quatro pessoas e no máximo sete pessoas.

Nestas condições, e não interessando a organização dos amigos dentro de cada autocaravana, de quantos modos diferentes podem os amigos ficar distribuídos pelas autocaravanas?

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.1.	1.2.	1.3.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	
15	15	10	20	10	15	15	10	10	20	10	15	15	20	200

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1.

1.1. $\frac{R}{4!} \frac{D}{4!} \frac{V_1}{6!} \frac{V_2}{6!} \frac{V_3}{6!} \frac{V_4}{6!}$

$$4! \times 4! \times 6! = 414\,720$$

- 4! é o número de maneiras distintas de os quatro reis permutarem entre si;
- 4! é o número de maneiras distintas de as quatro damas permutarem entre si;
- 6! é o número de maneiras distintas de o bloco dos reis, o bloco das damas e os quatro valetes permutarem entre si.

1.2. Existem três casos mutuamente exclusivos: saírem 0 ases ou sair 1 ás ou saírem 2 ases.

- ${}^{48}C_5$ é o número de maneiras distintas de se escolher cinco cartas que não são ases sem que a ordem interesse.
- ${}^4C_1 \times {}^{48}C_4$ é o número de maneiras distintas de se escolher um ás e quatro cartas que não são ases sem que a ordem interesse.
- ${}^4C_2 \times {}^{48}C_3$ é o número de maneiras distintas de se escolher dois ases e três cartas que não são ases, sem que a ordem interesse.

Assim, ${}^{48}C_5 + {}^4C_1 \times {}^{48}C_4 + {}^4C_2 \times {}^{48}C_3 = 2\,594\,400$ é o número pedido.

1.3. Opção (D)

Número de casos possíveis:

$13^4 = 28\,561$ é o número de maneiras distintas de o André, o António, o Pedro e o Rodrigo escolherem, cada um, uma carta do naipe de paus.

Número de casos favoráveis: ${}^4C_2 \times 1 \times 1 \times 12 \times 12$

4C_2 é o número de maneiras diferentes de escolher quem são os dois rapazes que vão escolher o rei de paus e, por cada uma destas maneiras, existem 12×12 modos distintos de os restantes dois rapazes escolherem, cada um, uma carta de paus diferente do rei.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^4C_2 \times 12^2}{13^4} = \frac{864}{28\,561}$.

2. $\frac{2}{4 \times 4 \times {}^3C_2}$ ou $\frac{4}{5 \times {}^4C_2 \times 2!}$ ou $\frac{5}{5 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2}$

Existem três casos mutuamente exclusivos:

- o número começa por 2: o algarismo 0 pode ocupar quatro posições distintas (unidades, dezenas, centenas ou unidades de milhar). Por cada uma destas posições, existem quatro posições diferentes para colocar o algarismo 2 que falta.



Por cada uma destas maneiras, existem 3C_2 modos diferentes de escolher as posições dos dois algarismos 4. Finalmente, o algarismo 5 só tem uma posição possível.

- o número começa por 4: o 0 pode ocupar qualquer uma das cinco posições distintas (unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar ou dezenas de milhar). Por cada uma destas posições, existem 4C_2 formas diferentes de escolher as posições para os dois algarismos 2.

Por cada uma destas formas, existem 2! modos distintos de escolher as posições do algarismo 4 e do algarismo 5.

- o número começa por 5: o 0 pode ocupar qualquer uma das cinco posições distintas (unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar ou dezenas de milhar). Por cada uma destas posições, existem 4C_2 formas diferentes de escolher as posições para os dois algarismos 2.

Por cada uma destas formas, existe apenas uma maneira (2C_2) de colocar os dois algarismos 4 nas posições que sobram.

Assim, o número pedido é igual a $4 \times 4 \times {}^3C_2 + 5 \times {}^4C_2 \times 2! + 5 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 138$.

3. Opção (B)

Como a linha do triângulo de Pascal tem 13 elementos, então $n = 12$.

Assim, os elementos dessa linha são:

$$\begin{array}{ccccccc} {}^{12}C_0 & {}^{12}C_1 & {}^{12}C_2 & \dots & {}^{12}C_{10} & {}^{12}C_{11} & {}^{12}C_{12} \\ 1 & 12 & 66 & \dots & 66 & 12 & 1 \end{array}$$

Para que a soma seja 13, teremos que escolher um 1 e um 12.

Assim, o número de casos favoráveis é igual a 2×2 e o número de casos possíveis é igual a ${}^{13}C_2$.

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{4}{{}^{13}C_2} = \frac{2}{39}$.

4. O termo geral deste desenvolvimento é:

$${}^6C_k a^{6-k} \times (2x)^k = {}^6C_k a^{6-k} \times 2^k \times x^k, \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

O termo em x^3 ocorre quando $k = 3$:

$${}^6C_3 \times a^3 \times 2^3 = -160 \Leftrightarrow 160a^3 = -160$$

$$\Leftrightarrow a^3 = -1$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$



5. Sabemos que $P(A) = 0,3$ e que $P(B) = 0,5$. Além disso:

$$\begin{aligned}P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,4 &\Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,4 \\&\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,4 \\&\Leftrightarrow 1 - 0,4 = P(A \cup B) \\&\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,6\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Então:

$$\begin{aligned}0,6 = 0,3 + 0,5 - P(A \cap B) &\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,8 - 0,6 \\&\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\overline{B} | (A \cup B)) &= \frac{P(\overline{B} \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \\&= \frac{P(\overline{B} \cap A) \cup \overline{B} \cap \overline{B}}{P(A \cup B)} = \\&= \frac{P((A \cap \overline{B}) \cup \emptyset)}{P(A \cup B)} = \\&= \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A \cup B)} = \\&= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \\&= \frac{0,3 - 0,2}{0,6} = \\&= \frac{0,1}{0,6} = \\&= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

6. Opção (B)

Número de casos possíveis: $9!$

Número de casos favoráveis: ${}^4A_3 \times 6!$, onde 4A_3 é o número de maneiras de escolher ordenadamente três dos quatro algarismos primos (2, 3, 5 e 7) para ocupar os três primeiros lugares. Por cada uma destas maneiras, existem $6!$ formas de colocar os restantes seis algarismos (um primo e cinco não primos) nos restantes seis lugares.

A probabilidade pretendida é $\frac{{}^4A_3 \times 6!}{9!} = \frac{1}{21}$.

7. Opção (C)

Número de casos possíveis:

$$\underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times \dots \times 7}_{n \text{ amigos}} = 7^n = {}^7A'_n$$

Número de casos favoráveis:

$$\underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 6}_{n \text{ amigos}} \times \underbrace{6 \times \dots \times 6}_{n-3 \text{ amigos}} \times {}^nC_3 = {}^nC_3 \times 6^{n-3}$$

Observe-se que nC_3 é o número de maneiras de formar o grupo de amigos que escolheu a quinta-feira, sendo que, por cada uma destas maneiras, há 6^{n-3} maneiras de os restantes $n - 3$ amigos escolherem um dos seis dias da semana que não a quinta-feira.

8. Pretendemos determinar quantos números naturais pares de sete algarismos se podem escrever utilizando um algarismo 0, um algarismo 1, dois algarismos 8 e três algarismos 9.

Existem dois casos mutuamente exclusivos: ou terminam em 0 ou terminam em 8.

No caso de o número terminar em 0, existem 6C_2 maneiras distintas de escolher as posições dos dois algarismos 8 e, por cada uma destas maneiras, existem 4C_3 maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 9. Para cada uma destas maneiras, só existe uma posição para colocar o algarismo 1. Assim, ${}^6C_2 \times {}^4C_3$ é o número de números pares nas condições pedidas e que terminam em 0.

No caso de o número terminar em 8, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do 0 (não pode ocupar a primeira posição) e, por cada uma destas maneiras, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do algarismo 8 que resta. Para cada uma destas maneiras, existem 4C_3 maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 9. Feito isto, o algarismo 1 só tem uma maneira de ser colocado. Assim, $5^2 \times {}^4C_3$ é o número de números pares nas condições pedidas e que terminam em oito.

${}^6C_2 \times {}^4C_3 + 5^2 \times {}^4C_3$ é, então, uma resposta correta ao problema.

9. Opção (B)

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)! - {}^nA_n}{(n-1)!} &= \frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n \times (n-1)! - n(n-1)!}{(n-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)![(n+1)n - n]}{(n-1)!} = \\ &= n^2 + n - n = \\ &= n^2 \end{aligned}$$



- Na opção (A): ${}^n C_n = 1$
- Na opção (B): ${}^n C_1 \times {}^n C_{n-1} = n \times {}^n C_1 = n \times n = n^2$
- Na opção (C): ${}^n C_1 = n$
- Na opção (D): ${}^n C_1 + {}^n C_{n-1} = n + n = 2n$

10. Sabe-se que $\frac{P(A|B)}{P(B)} = 1$.

Assim:

$$P(A|B) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = (P(B))^2$$

Como:

$$\begin{aligned} P(A \cup \bar{B}) &= P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(A) + 1 - P(B) - (P(A) - P(A \cap B)) = \\ &= 1 - P(B) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

e $P(A \cap B) = (P(B))^2$, vem que:

$$P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(B) + (P(B))^2 = (P(B))^2 - P(B) + 1, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

11. Consideremos os acontecimentos:

M : "o cientista é da área da Matemática"

N : "o cientista é português"

Do enunciado, sabemos que:

- $P(M) = 0,4$
- $P(\bar{N}|M) = \frac{3}{5}$

Pretende-se saber $P(\bar{N} \cup \bar{M})$:

Como $P(\bar{N}|M) = \frac{3}{5}$ e $P(M) = 0,4$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{P(\bar{N} \cap M)}{P(M)} = \frac{3}{5} &\Leftrightarrow P(\bar{N} \cap M) = \frac{3}{5} \times 0,4 \Leftrightarrow P(M) - P(M \cap N) = 0,24 \\ &\Leftrightarrow 0,4 - P(M \cap N) = 0,24 \\ &\Leftrightarrow P(M \cap N) = 0,16 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} P(\bar{N} \cup \bar{M}) &= P(\overline{N \cap M}) = 1 - P(N \cap M) = \\ &= 1 - 0,16 = \\ &= 0,84 \end{aligned}$$

A probabilidade de o cientista não ser português ou não ser da área da Matemática é 84%.



12. Existem três tipos de casos que se excluem mutuamente:

- 1.º caso: cada autocaravana leva cinco amigos;
- 2.º caso: duas autocaravanas levam quatro amigos e a outra leva sete;
- 3.º caso: uma autocaravana leva quatro amigos, outra leva cinco e a outra leva seis amigos.

Assim, para distribuir os amigos pelas três autocaravanas diferentes:

- no 1.º caso existem ${}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 \times {}^5C_5 \times 3! = 4\,540\,536$ maneiras;
- no 2.º caso existem ${}^{15}C_4 \times {}^{11}C_4 \times {}^7C_7 \times 3! = 2\,702\,700$ maneiras;
- no 3.º caso existem ${}^{15}C_4 \times {}^{11}C_5 \times {}^6C_6 \times 3! = 3\,783\,780$ maneiras.

No total, existem, então, 11 027 016 maneiras diferentes de os amigos se distribuírem pelas três autocaravanas.