Proposta de teste de avaliação

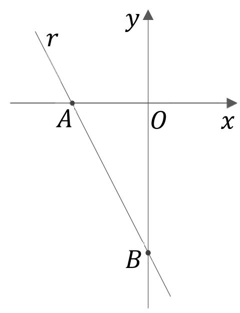
Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, a reta r, definida pela equação $y=-2x-4$



Sabe-se que a reta r interseta os eixos Ox e Oy nos pontos A e B, respetivamente.

1.1. Defina por uma equação a circunferência de diâmetro $[AB]$.

1.2. Para um certo número real a, diferente de zero, a reta s definida pela equação vetorial $(x, y)=(2a, a-5)+k(a, a-9)$, $k \in \mathbb{R}$ é paralela à reta r.

Qual é o valor de a?

(A) 1 **(B)** $\frac{5}{2}$ **(C)** 3 **(D)** 6

2. Considere a sucessão (u_n) definida por $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2.1. Justifique que (u_n) é decrescente em sentido lato.

2.2. Qual é, em graus, a inclinação da reta AB, sabendo que, num referencial ortonormado xOy, os pontos A e B tem coordenadas $(0, u_1)$ e $(1, u_3)$, respetivamente?

3. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ e $b_n = a_n - 3$.

3.1. Sabendo que $a_n > 3$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, mostre que (b_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

3.2. A soma dos primeiros vinte termos de (b_n), com arredondamento às décimas, é igual a:

A) 21,0 **(B)** 30,0 **(C)** 70,0 **(D)** 266,7

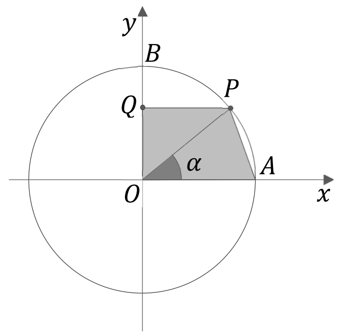
4. Seja (v_n) uma progressão aritmética de razão 2 cujo segundo termo é $v_2 = 5$.

Qual é o centésimo termo da sucessão (v_n)?

(A) 101 **(B)** 201 **(C)** 301 **(D)** 401

5. Na figura, está representada a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:



- os pontos A e B tem coordenadas $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respetivamente;
- o ponto P se desloca ao longo do arco AB e que o ponto Q se desloca ao longo do eixo Oy, de tal forma que $[QP]$ é sempre paralelo ao eixo Ox.

Para cada posição do ponto P, seja α a amplitude do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

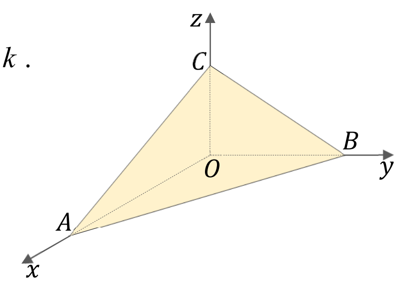
Qual das seguintes expressões dá a área do trapézio $[OAPQ]$, em função de α?

(A) $\frac{\cos\alpha(2+\sin\alpha)}{2}$ **(B)** $\frac{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}{2}$

(C) $\frac{3\cos\alpha\sin\alpha}{2}$ **(D)** $\frac{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}{2}$

6. Na figura está representada, num referencial ortonormado $Oxyz$, a pirâmide triangular $[OABC]$.

Sabe-se que:



- a face $[ABC]$ está contida no plano α definido, para determinado número real k, pela equação $x + 2y + 3z = k$.
- A, B e C são os pontos de interseção do plano α com os eixos Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- O plano α contém o ponto D de coordenadas $(1, 1, 1)$.

6.1. Mostre que:

a) $k = 6$;

b) A, B e C têm coordenadas $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ e $(0, 0, 2)$, respetivamente.

6.2. Calcule a amplitude do ângulo BAC.

Apresente o resultado em gaus com aredondamento às décimas.

6.3. Calcule a distância da origem do referencial ao plano α.

7. Sendo θ um ângulo obtuso, a que quadrante pertence o ângulo de amplitude $\frac{5\pi}{2} - \theta$?

(A) Primeiro quadrante **(B)** Segundo quadrante

(C) Terceiro quadrante **(D)** Quarto quadrante

8. O limite da sucessão (u_n) , definida por $u_n = \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{3 - 2n}$, é:

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** -2 **(D)** -1

9. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o primeito termo é igual a 95 e que a soma dos vinte primeiros termos é igual a 0.

Determine uma expressão do termo geral de (u_n).

10. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere:

- a reta r que contém a origem do referencial e tem a direção do vetor $\vec{r} = (1, 2, -3)$;
- o plano α definido pela equação $x + y + z = 0$.

A interseção da reta r com o plano α é:

(A) a origem do referencial.

(B) a reta r .

(C) o conjunto vazio.

(D) o ponto de coordenadas $(1, 1, -2)$.

Formulário

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $S_n = b_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

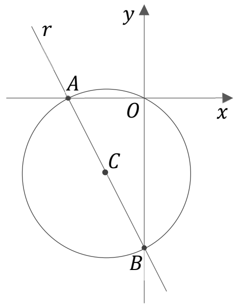
COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.1.a)**	**6.1.b)**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	
15	10	15	15	15	10	10	10	10	15	15	15	10	10	15	10	**100**
TOTAL (Caderno1 + Caderno2)																**200**

Proposta de resolução

1. $r:\ y=-2x-4$

1.1. Ponto A: $0=-2x-4 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$



$A(-2, 0)$

Ponto B: $y=-2\times 0-4=-4$

$B(0,-4)$

O centro da circunferência é C, ponto médio de $[AB]$.

$C\left(\frac{-2+0}{2},\frac{0-4}{2}\right)$, ou seja, $C(-1,-2)$

Raio: $r=\overline{AC}=\sqrt{(-2+1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

Equação da circunferência de diâmetro $[AB]$:

$(x+1)^2+(y+2)^2=5$

1.2. $s:\ (x, y)=(2a, a-5)+k(a, a-9),\ k\in\mathbb{R}$

O declive da reta r é -2.

O declive da reta s é $\frac{a-9}{a}$.

$\frac{a-9}{a}=-2 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a-9=-2a \Leftrightarrow 3a=9 \Leftrightarrow a=3$

Resposta: (C)

2. $(u_n):\ \begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n-n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

2.1. $u_{n+1}=u_n-n+1 \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=-n+1$

$u_{n+1}-u_n=0$ se $n=1$ e $u_{n+1}-u_n<0$ se $n>1$

Como $u_{n+1}-u_n\leq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, podemos concluir que (u_n) é decrescente em sentido lato.

2.2. $u_1=2$

$u_2=u_1-1+1=2-1+1=2$

$u_3=u_2-2+1=2-2+1=1$

$A(0,u_1)\Leftrightarrow A(0,2)$

$B(1,u_3)\Leftrightarrow B(1,1)$

Declive de $AB=m_{AB}=\frac{1-2}{1-0}=-1$

Se α é a inclinação de AB então $\tan\alpha=-1 \wedge 90^\circ<\alpha<180^\circ$, pelo que $\alpha=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.

3. $(a_n):\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$; $\quad b_n = a_n - 3$

3.1. $b_n = a_n - 3$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}-3}{a_n-3} = \frac{\frac{2}{3}a_n + 1 - 3}{a_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}a_n - 2}{a_n - 3} = \frac{\frac{2a_n - 6}{3}}{a_n - 3} = \frac{\frac{2(a_n-3)}{3}}{a_n-3} = \frac{2(a_n-3)}{3(a_n-3)}$$

Dado que $a_n \neq 3$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2(a_n-3)}{3(a_n-3)} = \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto, (b_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

3.2. $b_1 = a_1 - 3 = 10 - 3 = 7$

$$S_{20} = b_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{20}}{1-\frac{2}{3}} = 7 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{20}}{1-\frac{2}{3}} \approx 20{,}99 \approx 21{,}0 \qquad \left| \; S_n = b_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \right.$$

Resposta: (A)

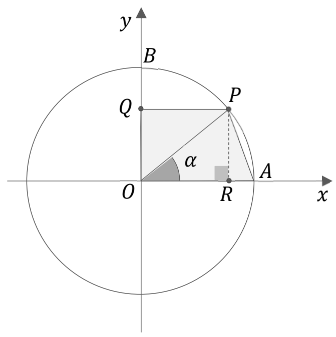
4. $v_2 = 5$ e $r = 2$

$v_n = v_2 + (n-2) \times r \Leftrightarrow v_n = 5 + (n-2) \times 2 \Leftrightarrow v_n = 5 + 2n - 4 \Leftrightarrow v_n = 2n + 1$

$v_{100} = 2 \times 100 + 1 = 201$

Resposta: (B)

5. Seja R o ponto de $[OA]$ tal que $PR \perp Ox$.



Tem-se:

$\sin\alpha = \overline{PR}$ e $\cos\alpha = \overline{OR} = \overline{QP}$

$$A_{[OAPQ]} = \frac{\overline{OA} + \overline{QP}}{2} \times \overline{PR} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \times \sin\alpha =$$

$$= \frac{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}{2}$$

Resposta: (B)

6. $\alpha : x + 2y + 3z = k$

6.1. **a)** $D(1,1,1) \in \alpha$

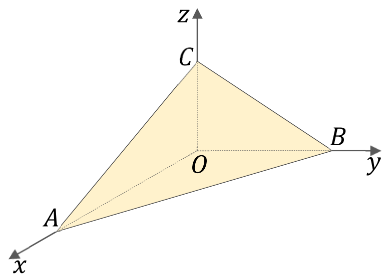
$1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 = k \Leftrightarrow k = 6$

b) $\alpha : x + 2y + 3z = 6$

$A(a, 0, 0):\ a + 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow a = 6 \qquad A(6, 0, 0)$

$B(0, b, 0):\ 0 + 2b + 0 = 6 \Leftrightarrow b = 3 \qquad B(0, 3, 0)$

$C(0, 0, c):\ 0 + 0 + 3c = 6 \Leftrightarrow c = 2 \qquad C(0, 0, 2)$



6.2. $B\hat{A}C = \left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 3, 0) - (6, 0, 0) = (-6, 3, 0)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, 2) - (6, 0, 0) = (-6, 0, 2)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-6, 3, 0) \cdot (-6, 0, 2) = -6 \times (-6) + 0 + 0 = 36$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$

$\cos\left(B\hat{A}C\right) = \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \dfrac{36}{\sqrt{45} \times \sqrt{40}}$

Se $\cos\left(B\hat{A}C\right) = \dfrac{36}{\sqrt{45} \times \sqrt{40}}$, então $B\hat{A}C \approx 31{,}9^{\circ}$.

6.3. A a distância da origem do referencial ao plano α é a distância da origem O ao ponto O', projeção ortogonal de O em α .

O ponto O' é a interseção com α da reta r que passa em O e é perpendicular a α

Vetor diretor da reta r : $\vec{r} = (1, 2, 3)$

Equação vetorial de r : $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(1, 2, 3), k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico da reta r : $R(k, 2k, 3k), k \in \mathbb{R}$

Substituido as coordenadas de R na equação de α , obtemos:

$k + 2 \times 2k + 3 \times 3k = 6 \Leftrightarrow k + 4k + 9k = 6 \Leftrightarrow 14k = 6 \Leftrightarrow k = \dfrac{6}{14} \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{7}$

As coordenadas de O', interseção de r com α , obtêm-se substituindo k por $\dfrac{3}{7}$ em R :

$O'\left(\dfrac{3}{7}, 2 \times \dfrac{3}{7}, 3 \times \dfrac{3}{7}\right) = O'\left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{9}{7}\right)$

$d(O, \alpha) = \overline{OO'} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{6}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{7}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{49} + \dfrac{36}{49} + \dfrac{81}{49}} = \sqrt{\dfrac{126}{49}} = \dfrac{3\sqrt{14}}{7}$

7. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Leftrightarrow -\pi < -\theta < -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{2} - \pi < \frac{5\pi}{2} - \theta < \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{2} - \theta < 2\pi$$

O ângulo de amplitude $\frac{5\pi}{2} - \theta$ pertence ao quarto quadrante.

Resposta: (D)

8. $\lim(u_n) = \lim \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{3 - 2n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{\sqrt{n^2\left(4 - \frac{1}{n^2}\right)}}{3 - 2n} \underset{n>0}{=} \lim \frac{n\sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}}{n\left(\frac{3}{n} - 2\right)} =$

$$= \lim \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}}{\frac{3}{n} - 2} = \frac{\sqrt{4 - 0}}{0 - 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Resposta: (D)

9. $u_1 = 95$; $S_{20} = 0$

$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 \Leftrightarrow 0 = \frac{95 + u_{20}}{2} \times 20 \Leftrightarrow 95 + u_{20} = 0 \Leftrightarrow u_{20} = -95$ | $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

$u_{20} = u_1 + (20 - 1) \times r \Leftrightarrow -95 = 95 + 19r \Leftrightarrow -95 - 95 = 19r \Leftrightarrow$ | $u_n = u_k + (n - k) \times r$

$$\Leftrightarrow -190 = 19r \Leftrightarrow r = -10$$

$u_n = u_1 + (n - 1) \times r \Leftrightarrow u_n = 95 + (n - 1) \times (-10) \Leftrightarrow u_n = 95 - 10n + 10 \Leftrightarrow u_n = -10n + 105$

$u_n = -10n + 105$

10. $\vec{r} = (1, 2, -3)$ é um vetor diretor da reta r.

$\vec{u} = (1, 1, 1)$ é um vetor perpendicular a α.

$\vec{r} \cdot \vec{u} = (1, 2, -3) \cdot (1, 1, 1) = 1 + 2 - 3 = 0$.

Como $\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares pelo que a reta r é paralela ao plano α.

Dado que $0 + 0 + 0 = 0$, o ponto $(0, 0, 0)$, a origem do referencial, pertence ao plano α.

Atendendo a que a reta r passa na origem, este ponto é comum à reta e ao plano.

Portanto, se a reta r é paralela ao plano α e têm um ponto comum, então a reta está contida no plano.

Logo, a interseção da reta r com o plano α é a reta r.

Resposta: (B)