Teste de Matemática A

2020 / 2021

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

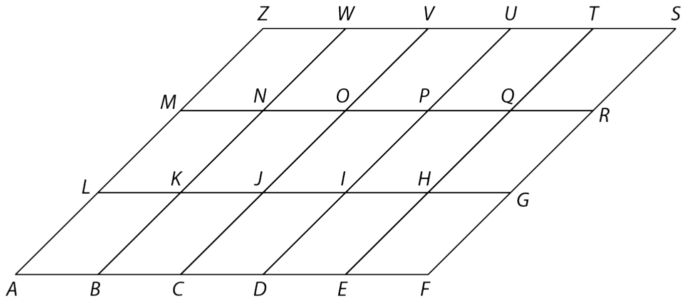
1. Observe a seguinte figura, constituída por paralelogramos geometricamente iguais.

Considere as seguintes afirmações:

I. $A + 2\overrightarrow{FG} = R$

II. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AQ}$

III. $S - 2\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{DI} = O$



Acerca destas afirmações, pode afirmar-se que:

(A) são todas falsas.

(B) apenas II e III são falsas.

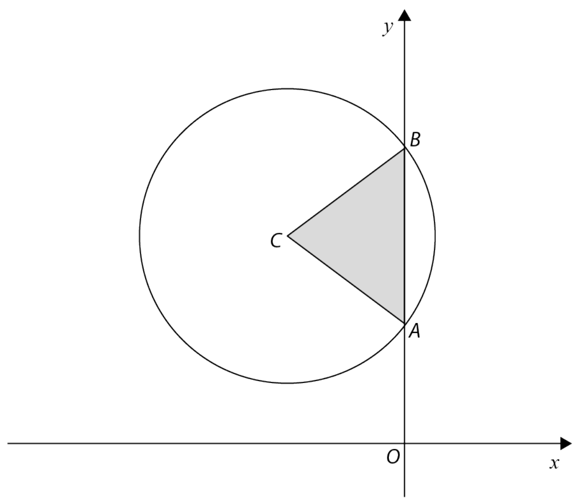
(C) apenas I e II são falsas.

(D) apenas I e III são falsas.

2. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência definida pela condição $x^2 + y^2 + 8x - 14y = -40$ e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se, ainda, que:

- C é o centro da circunferência;
- A e B são os pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy, sendo A o ponto de menor ordenada.



2.1. Mostre que $C(-4,7)$.

2.2. A reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares que passa pelo centro da circunferência pode ser definida por:

(A) $(x, y) = (-4,7) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y) = (-4,7) + k(-1,1), k \in \mathbb{R}$

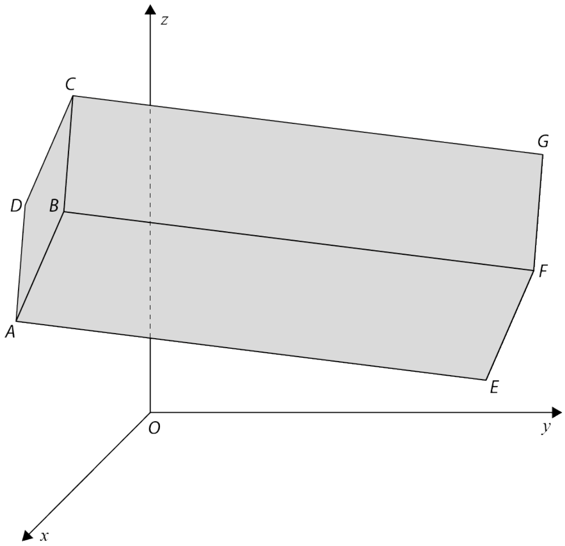
(C) $(x, y) = (-4,7) + k(1,1), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y) = (-4,7) + k(0,1), k \in \mathbb{R}$

2.3. Mostre que $A(0,4)$ e $B(0,10)$.

2.4. Defina por uma condição o triângulo $[ABC]$.

3. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular de bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).



Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(7, 1, 4)$;
- o vértice G tem coordenadas $\left(\frac{20}{7}, \frac{51}{7}, \frac{32}{7}\right)$;
- o vetor $\overrightarrow{AE}$ tem coordenadas $(-3, 6, -2)$.

3.1. As coordenadas do ponto do plano DCG que se encontra mais próximo do ponto B são:

(A) $(-3,14,9)$

(B) $\left(\frac{20}{7}, \frac{51}{7}, \frac{32}{7}\right)$

(C) $(7,1,4)$

(D) $\left(\frac{41}{7}, \frac{9}{7}, \frac{46}{7}\right)$

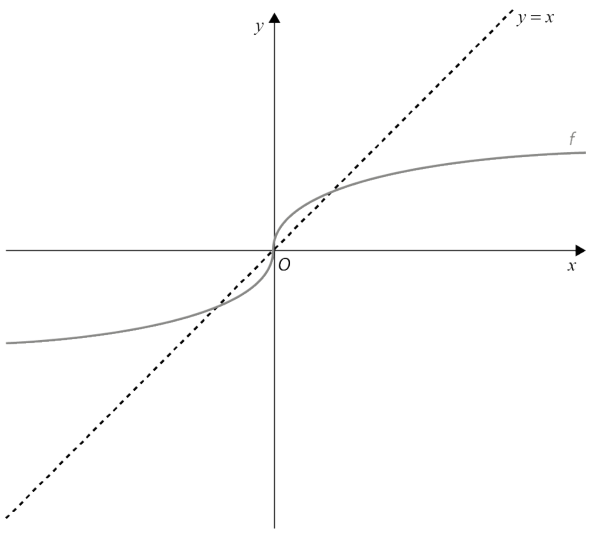
3.2. Determine o volume do prisma $[ABCDEFGH]$.

3.3. Determine uma equação vetorial da reta CG.

3.4. Determine a equação reduzida da superfície esférica de diâmetro $[AG]$.

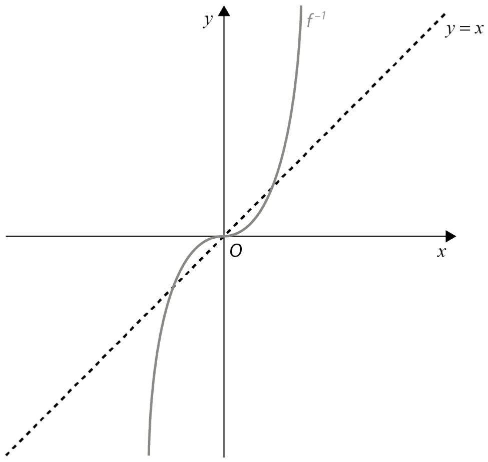
3.5. Seja α o plano que é perpendicular ao segmento de reta $[AG]$ e que passa no seu ponto médio. Determine uma equação do plano α. Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

4. Na figura está a representação gráfica de uma função f e a tracejado a reta de equação $y = x$.

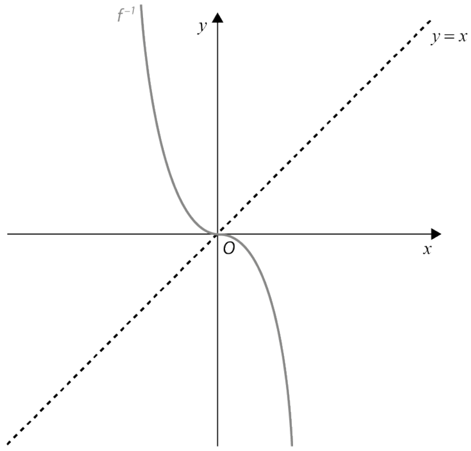


Qual das figuras seguintes representa graficamente a função f^{-1}, função inversa de f?

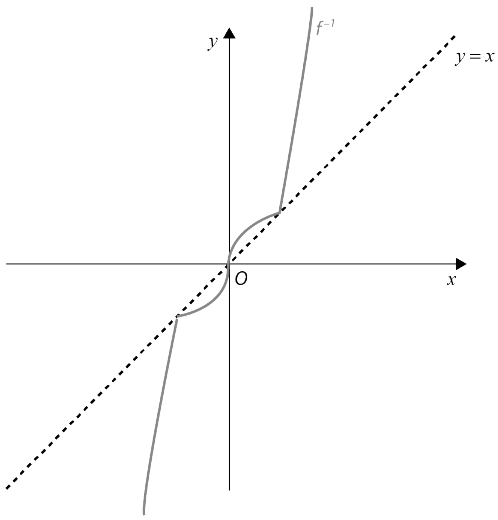
(A)



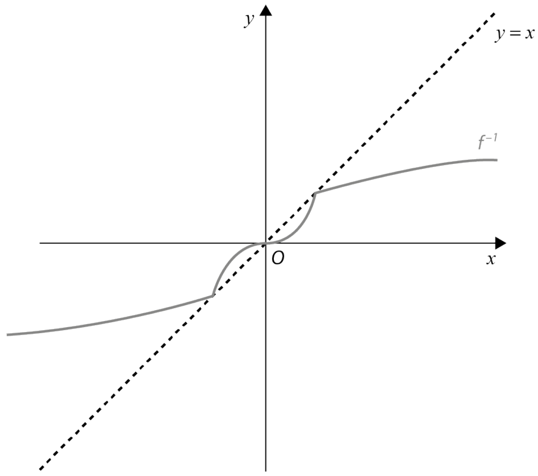
(B)



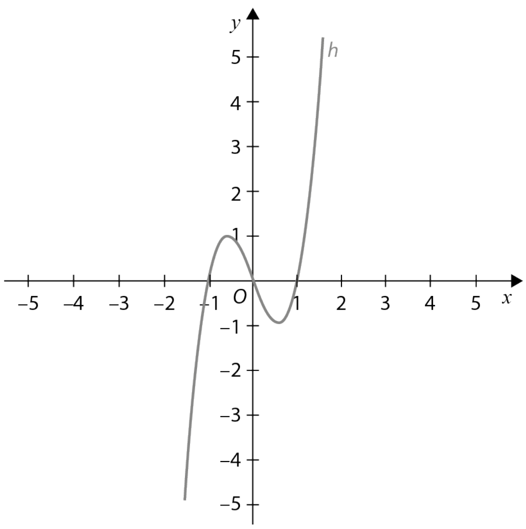
(C)



(D)



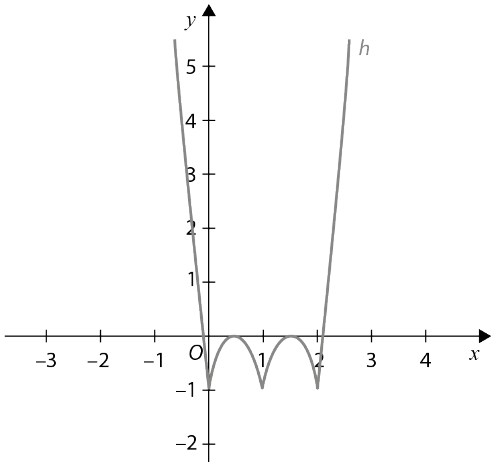
5. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura abaixo.



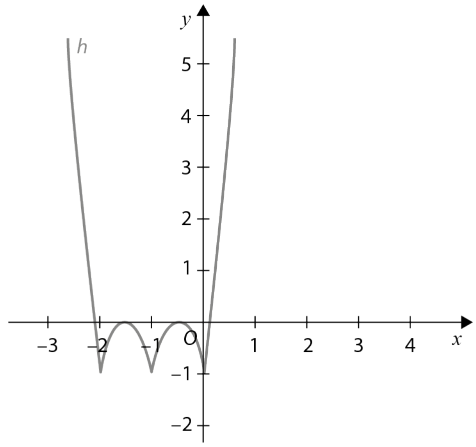
Seja h a função definida por $h(x) = |f(x+1)| - 1$.

Em qual das opções seguintes pode estar a representação gráfica da função h?

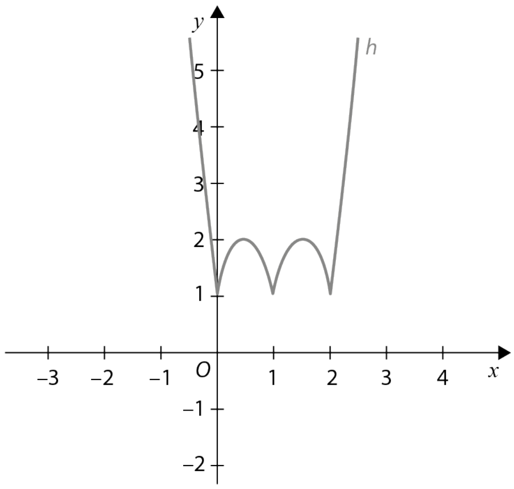
(A)



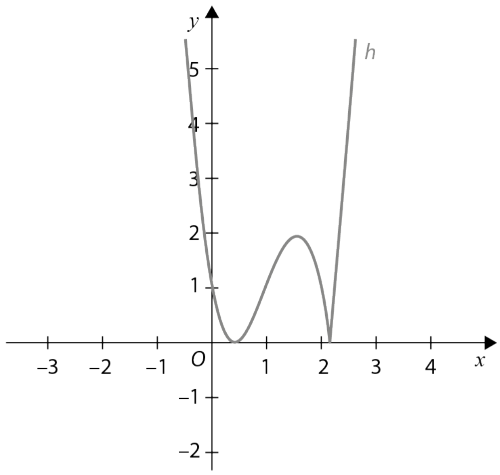
(B)



(C)



(D)



6. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

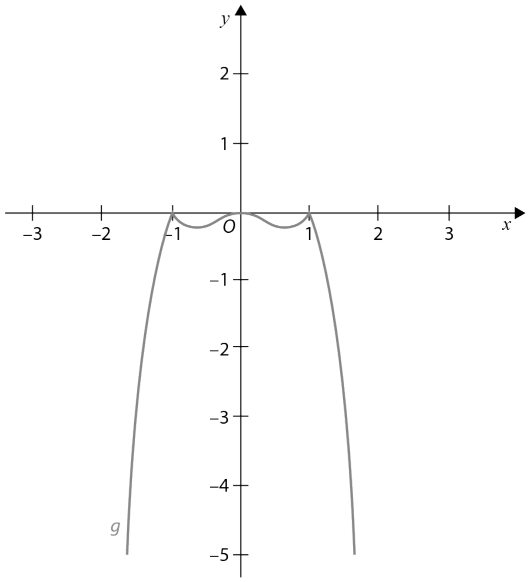
- f é ímpar;
- f é estritamente crescente em $[1, +\infty[$;
- a tabela de sinal da função f é a seguinte:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

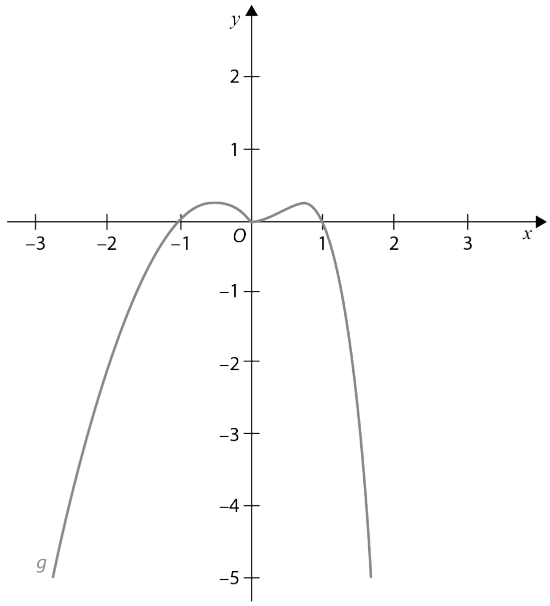
Considere a função real de variável real g definida por $g(x) = -x \times f(x)$.

Nenhuma das representações gráficas a seguir apresentadas é a representação gráfica da função g.

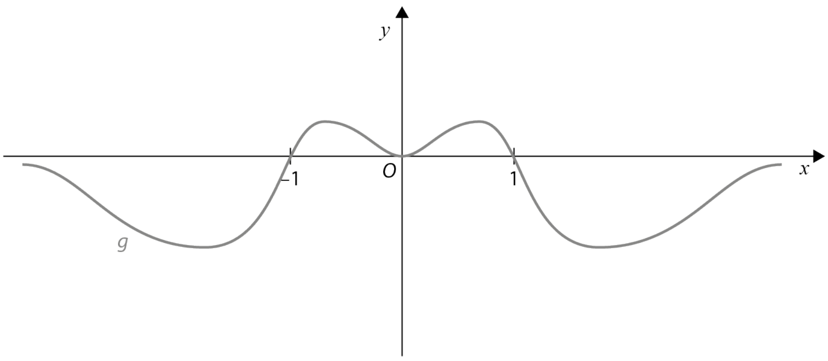
I.



II.



III.



Elabore uma composição na qual apresente, para cada uma das representações gráficas, uma razão pela qual essa representação não pode ser a representação gráfica da função g.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**3.4.**	**3.5.**	**4.**	**5.**	**6.**	
10	15	10	20	20	10	20	15	20	20	10	10	20	**200**

Teste N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

I. $A + 2\overrightarrow{FG} = R$ é uma proposição falsa, pois $A + 2\overrightarrow{FG} = A + \overrightarrow{AM} = M$.

II. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AQ}$ é uma proposição verdadeira.

III. $S - 2\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{DI}$ é uma proposição falsa, pois $S + 2\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{ID} = S + \overrightarrow{SW} + \overrightarrow{ID} = W + \overrightarrow{WN} = N$.

2.

2.1. $x^2 + y^2 + 8x - 14y = -40 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 14y + 49 = -40 + 16 + 49$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-7)^2 = 25$$

Logo, $C(-4,7)$.

2.2. Opção (C)

A bissetriz dos quadrantes ímpares admite como vetor diretor o vetor de coordenadas (1, 1). Assim, uma equação vetorial da reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares que passa em C poderá ser:

$$(x, y) = (-4,7) + k(1,1), k \in \mathrm{IR}$$

2.3. $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 8x - 14y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ y^2 - 14y + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ y = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \times 40}}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ y = \frac{14 \pm \sqrt{36}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ y = \frac{14 \pm 6}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Logo, $A(0, 4)$ e $B(0, 10)$.

2.4. $\overrightarrow{BC} = C - B = (-4,7) - (0,10) = (-4,-3)$ $\qquad m_{BC} = \frac{3}{4}$

$BC: y = \dfrac{3}{4}x + 10$

$\overrightarrow{CA} = A - C = (0,4) - (-4,7) = (4,-3)$ $\qquad m_{CA} = -\frac{3}{4}$

$CA: y = -\dfrac{3}{4}x + 4$

Logo, o triângulo $[ABC]$ poderá ser definido por:

$$y \leq \frac{3}{4}x + 10 \ \wedge y \geq -\frac{3}{4}x + 4 \ \wedge \ x \leq 0$$

3.

3.1. Opção (D)

O ponto do plano DCG que se encontra mais próximo do ponto B é o ponto C, por se tratar da projeção ortogonal de B sobre o plano DCG.

$$C = G + \overrightarrow{EA} = \left(\frac{20}{7}, \frac{51}{7}, \frac{32}{7}\right) + (3, -6, 2) = \left(\frac{41}{7}, \frac{9}{7}, \frac{46}{7}\right)$$

Cálculo auxiliar

$\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE} = (3, -6, 2)$

3.2. Por se tratar de um prisma quadrangular regular, sabemos que as bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$ são quadrados.

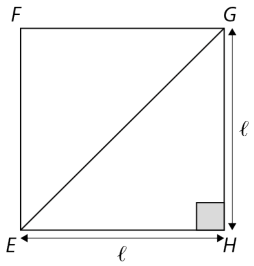
$$V_{\text{prisma}} = \overline{EF} \times \overline{EF} \times \overline{AE} = \overline{EF}^2 \times \overline{AE}$$

$$\overrightarrow{EG} = G - E = \left(\frac{20}{7}, \frac{51}{7}, \frac{32}{7}\right) - (4,7,2) = \left(-\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{18}{7}\right)$$

$$\|\overrightarrow{EG}\| = \sqrt{\left(-\frac{8}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{18}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+4+324}{49}} = \sqrt{\frac{392}{49}} = \sqrt{8}$$

Cálculo auxiliar

$E = A + \overrightarrow{AE} = (7, 1, 4) + (-3, 6, -2) =$
$= (4,7,2)$



$$\left(\sqrt{8}\right)^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow 8 = 2l^2 \Leftrightarrow l^2 = 4$$

$$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

$V_{\text{prisma}} = 4 \times 7 = 28$ u.v.

3.3. A reta CG é paralela a AE, logo $\overrightarrow{AE}$ é um vetor diretor de CG.

Uma equação vetorial de CG poderá ser:

$$(x, y, z) = \left(\frac{20}{7}, \frac{51}{7}, \frac{32}{7}\right) + k(-3,6,-2), k \in \mathrm{IR}$$

3.4. A superfície esférica de diâmetro $[AG]$ tem como centro o ponto médio do segmento de reta $[AG]$ e raio igual a $\frac{\overline{AG}}{2}$.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AG]$: $\left(\frac{7+\frac{20}{7}}{2}, \frac{1+\frac{51}{7}}{2}, \frac{4+\frac{32}{7}}{2}\right) = \left(\frac{69}{14}, \frac{58}{14}, \frac{60}{14}\right) = \left(\frac{69}{14}, \frac{29}{7}, \frac{30}{7}\right)$

$$\overrightarrow{AG} = \left(\frac{20}{7}, \frac{51}{7}, \frac{32}{7}\right) - (7,1,4) = \left(-\frac{29}{7}, \frac{44}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

$$\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{\left(-\frac{29}{7}\right)^2 + \left(\frac{44}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{841+1936+16}{49}} = \sqrt{\frac{2793}{49}} = \sqrt{57}$$

A equação reduzida da superfície esférica é:

$$\left(x-\frac{69}{14}\right)^2+\left(y-\frac{29}{7}\right)^2+\left(z-\frac{30}{7}\right)^2=\frac{57}{4}$$

3.5. α é o plano mediador do segmento de reta $[AG]$. Logo, pode ser definido por:

$$\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{20}{7}\right)^2+\left(y-\frac{51}{7}\right)^2+\left(z-\frac{32}{7}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-14x+49+y^2-2y+1+z^2-8z+16=x^2-\frac{40}{7}x+\frac{400}{49}+y^2-\frac{102}{7}y+\frac{2601}{49}+z^2-\frac{64}{7}z+\frac{1024}{49}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{58}{7}x+\frac{88}{7}y+\frac{8}{7}z-\frac{113}{7}=0$$

4. Opção (A)

Na opção (A), o gráfico cartesiano de f^{-1} é simétrico do gráfico cartesiano de f relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

5. Opção (B)

O gráfico de h obtém-se a partir do gráfico de f segundo:

- uma translação associada ao vetor de coordenadas $(-1,0)$;
- mantendo os pontos de ordenada não negativa e efetuando uma simetria dos pontos de ordenada negativa em relação ao eixo Ox;
- uma translação associada ao vetor de coordenadas $(0,-1)$

Logo, é na opção (B) que poderá estar representado o gráfico da função h.

6. Seja $x \in \mathrm{IR}$.

$g(-x)=-(-x)\times f(-x)=x\times(-f(x))$, pois f é ímpar.

$=-x\times f(x)=$

$=g(x)$

Logo, g é par, o que exclui a representação gráfica representada na opção II.

Sabemos que f é estritamente crescente em $[1,+\infty[$, isto é:

$$\forall x_1,x_2\in[1,+\infty[, x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Daqui se conclui que, para quaisquer $x_1,x_2\in[1,+\infty[$, se $x_1<x_2$, então $f(x_1)<f(x_2)$ e, consequentemente, $x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$. Logo,$-x_1f(x_1)>-x_2f(x_2)$, ou seja, $g(x_1)>g(x_2)$.

Assim, g é estritamente decrescente em $[1,+\infty[$, o que não se verifica na representação gráfica III que apresenta uma função que não é estritamente decrescente em $[1,+\infty[$.

Como $f(x)<0$, $\forall x\in]0,1[$ e $-x<0, \forall x\in]0,1[$, tem-se que $g(x)=-xf(x)>0, \forall x\in]0,1[$, o que não se verifica na representação gráfica I que apresenta uma função que não é positiva em $]0,1[$.