Teste de Matemática A

2020 / 2021

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

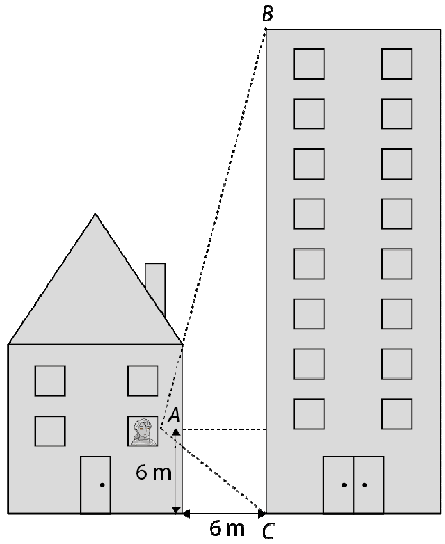
Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. A D. Maria está à janela de sua casa a olhar para o prédio vizinho, que se encontra à distância de 6 metros de sua casa. Sabe-se que a janela da D. Maria também se encontra à distância de 6 metros do solo e que, considerando a figura, $C\hat{A}B = 110°$.



Determine a altura, com aproximação às décimas, do prédio vizinho da D. Maria.

Se em cálculos intermédios proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Qual das seguintes expressões designa um número real positivo, para qualquer x pertencente ao terceiro quadrante?

(A) $\cos x + \operatorname{sen} x$ **(B)** $\operatorname{tg} x \times \cos x$ **(C)** $\operatorname{tg} x - \cos x$ **(D)** $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$

3. Considere $A(x) = \cos^2(2021\pi + x) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) - 2\operatorname{sen}(3\pi - x) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes.

3.1. Mostre que $A(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$.

3.2. Seja θ, tal que $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

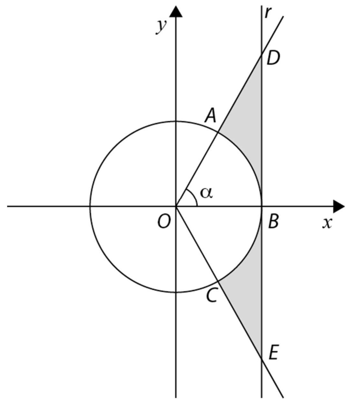
Sabendo que $\operatorname{tg}(2020\,\pi - \theta) = \frac{1}{3}$, determine o valor exato de $A(\theta)$.

Apresente a sua resposta na forma $a + b\sqrt{c}$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

3.3. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$.

Determine uma expressão geral dos maximizantes de f.

4. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e a reta r.



Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo das abcissas;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B;
- o ponto D é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$;
- o ponto E é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{O}C$;
- $\overline{BD} = \overline{BE}$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Qual das seguintes expressões representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \alpha}{2}$ **(B)** $\operatorname{tg}\alpha - \alpha$ **(C)** $\operatorname{sen}\alpha - \alpha$ **(D)** $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}{2}$

5. Considere a função f definida por $f(x) = \operatorname{tg}(4x) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Qual dos seguintes conjuntos pode representar o domínio da função f?

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(B) $\mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(D) $\mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

6. Considere a função f, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + 3\cos x + 2}.$$

6.1. Mostre que $f(x) = \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x}$.

6.2. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine as abcissas dos pontos do gráfico de f de ordenada 1.

6.3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A função f é uma função injetiva.

(B) A função f é uma função ímpar.

(C) A função f é uma função par.

(D) A função f não tem zeros.

7. Seja α um valor pertencente ao intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a condição $k^2 + 2\cos\alpha = 1$. Quais os valores reais de k para os quais a condição é possível?

(A) $[-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}]$ **(B)** $]-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}[$ **(C)** $[-1, 0[$ **(D)** $[-\sqrt{3}, -1[$

8. Num determinado ecossistema marinho, o número de uma espécie de ouriços-do-mar variou ao longo do ano de 2019 de acordo com diversos fatores. Os biólogos marinhos que estudavam essa espécie concluíram que o número N de ouriços-do-mar, em milhares, pode ser modelado, ao longo desse ano, por uma função da forma

$$N(t) = A + B\cos\left(\frac{\pi t}{25}\right)$$

onde A e B representam constantes e t representa o tempo, em meses, sendo que $t = 0$ corresponde às 0 horas do dia 1 de janeiro de 2019.

(o argumento da função cosseno está expresso em radianos).

8.1. Sabendo que no início do ano havia nesse ecossistema 16 000 ouriços-do-mar e que no início do mês de outubro desse mesmo ano havia 12 500, determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, os valores das constantes A e B.

Apresente os valores pedidos com arredondamento às décimas.

8.2. Considere agora que $A = 10$ e $B = 6$. Num certo instante de 2019, os biólogos marinhos responsáveis por este estudo registaram o número existente, em milhares, da espécie de ouriços-do-mar.

Sabe-se que, dois meses após esse instante, o número de elementos dessa espécie diminuiu 10%. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o instante t em que tal contagem foi efetuada.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de t, com aproximação às centésimas.

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	
15	10	20	20	20	10	10	20	15	10	10	20	20	**200**

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1. Sejam *A* o ponto que representa o local onde se encontra a D. Maria, *D* a projeção ortogonal do ponto *A* no solo e *E* a projeção ortogonal do ponto *A* no prédio vizinho.

O triângulo [*ADC*] é isósceles e retângulo em *D*, logo $D\hat{C}A = D\hat{A}C = 45°$.

Assim:

$E\hat{A}B = 110° - 45° = 65°$

e:

$\text{tg } 65° = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \overline{BE} = 6 \times \text{tg } 65°$

Logo:

$\overline{BC} = 6 + 6 \text{ tg } 65° \approx 18{,}9$

O prédio tem, aproximadamente, $18{,}9$ metros de altura.

2. Opção (C)

Se $x \in$ 3.º quadrante, então $\text{sen } x < 0, \cos x < 0$ e $\text{tg } x > 0$. Assim:

- $\cos x + \text{sen } x < 0$
- $\text{tg } x \times \cos x < 0$
- $\text{tg } x - \cos x > 0$
- $\frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} < 0$

3.

3.1. $A(x) = \cos^2(2021\pi + x) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) - 2\text{sen }(3\pi - x) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$= (-\cos x)^2 + (-\cos x) - (-\cos x) - 2 \text{ sen } x + (-\text{sen } x)^2 =$

$= \cos^2 x - \cos x + \cos x - 2 \text{ sen } x + \text{sen}^2 x =$

$= \cos^2 x + \text{sen}^2 x - 2 \text{ sen } x =$

$= 1 - 2 \text{ sen } x$

3.2. $\text{tg }(2020\,\pi - \theta) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\text{tg } \theta = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \text{tg } \theta = -\frac{1}{3}$

- Como $1 + \text{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$, tem-se que:

$1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{9}{10}$

- Como $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, tem-se que:

$$\frac{9}{10} + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{9}{10} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{10}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Como $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, vem que $\operatorname{sen}\theta < 0$.

Logo, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Assim:

$$A(\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}\theta = 1 - 2\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = 1 + \frac{\sqrt{10}}{5} = 1 + \frac{1}{5}\sqrt{10}$$

3.3. Sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1,\ \forall x \in \text{IR}$.

Assim:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -2\operatorname{sen} x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2\operatorname{sen} x \leq 3$$

Logo, $D'_f = [-1,3]$.

3 é, então, máximo de f, logo os maximizantes de f são os valores de x tais que $f(x) = 3$:

$$1 - 2\operatorname{sen} x = 3 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

4. Opção (B)

Seja A a área da região a sombreado.

$$A = 2\left(A_{\Delta[BOD]} - A_{\text{setor circular}}\right) = 2\left(\frac{\overline{OB}\times\overline{BD}}{2} - \frac{\alpha\times 1^2}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1\times\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha - \alpha$$

5. Opção (D)

O domínio da função f pode ser representado pelo seguinte conjunto:

$$\left\{x \in \mathbb{R}: 4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \mathbb{R}\backslash\left\{x: x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

6.

6.1. $f(x) = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x + 3\cos x + 2} = \frac{1-\cos^2 x}{(\cos x+1)(\cos x+2)} =$

$= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(2+\cos x)} =$

$= \frac{1-\cos x}{2+\cos x}$

Cálculo auxiliar

$\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3+1}{2} \lor \cos x = \frac{-3-1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 \lor \cos x = -2$

Logo, $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 = (\cos x + 1)(\cos x + 2)$.

6.2. Pretende-se os valores de $x \in]-\pi, \pi[$ tais que $f(x) = 1$.

$\frac{1-\cos x}{2+\cos x} = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos x = 2 + \cos x \Leftrightarrow -2\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Em $]-\pi, \pi[$, os valores de x pretendidos são $-\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

6.3. Opção (C)

$f(x) = \frac{1-\cos x}{2+\cos x}$

$f(-x) = \frac{1-\cos(-x)}{2+\cos(-x)} = \frac{1-\cos x}{2+\cos x}$

$-f(x) = -\frac{1-\cos x}{2+\cos x} = \frac{\cos x-1}{2+\cos x}$

- A opção (A) não apresenta uma afirmação verdadeira, pois existem objetos diferentes com a mesma imagem por f, por exemplo, $-\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$ e $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
- A opção (B) não apresenta uma afirmação verdadeira, pois não é verdade que para qualquer valor de x do domínio $]-\pi, \pi[$ se tenha $f(-x) = -f(x)$.
- A opção (C) apresenta uma afirmação verdadeira, pois, para qualquer valor de x do domínio $]-\pi, \pi[$, tem-se que $f(-x) = f(x)$.
- A opção (D) não apresenta uma afirmação verdadeira, pois, por exemplo, 0 é um zero de f. $f(0) = \frac{1-\cos 0}{2+\cos 0} = 0$.

7. Opção (A)

$k^2 + 2\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1-k^2}{2}$

Como $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, então $-1 \leq \cos\alpha < 0$.

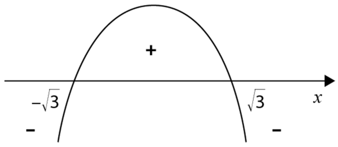
Assim:

$$-1 \leq \frac{1-k^2}{2} < 0 \Leftrightarrow -2 \leq 1-k^2 < 0 \Leftrightarrow 1-k^2 \geq -2 \;\wedge\; 1-k^2 < 0$$

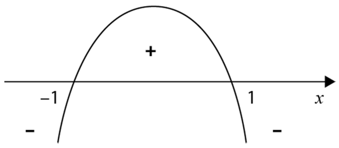
$$\Leftrightarrow 3-k^2 \geq 0 \;\wedge\; 1-k^2 < 0$$

Cálculos auxiliares

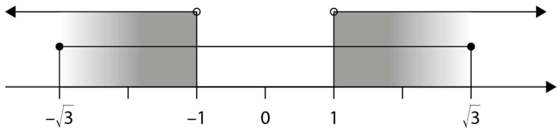
- $3-k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 3 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3}$



- $1-k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$



$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3} \;\wedge\; (k < -1 \;\vee\; k > 1)$$



Logo, $k \in \left[-\sqrt{3}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{3}\right]$.

8.

8.1. $t = 0$ corresponde ao início do mês de janeiro.

$t = 9$ corresponde ao início do mês de outubro.

$$\begin{cases} N(0) = 16 \\ N(9) = 12{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B\cos 0 = 16 \\ A + B\cos\left(\frac{9\pi}{25}\right) = 12{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 16 \\ \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 16 - B \\ 16 - B + B\cos\left(\frac{9\pi}{25}\right) = 12{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{\_\_\_\_\_\_} \\ B\left(-1 + \cos\left(\frac{9\pi}{25}\right)\right) = 12{,}5 - 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 16 - B \\ B = \frac{-3{,}5}{-1+\cos\left(\frac{9\pi}{25}\right)} \end{cases}$$

Assim, $B \approx 6{,}1$ e $A \approx 9{,}9$.

8.2. Sabe-se que, para um determinado valor de t, $N(t+2) = N(t) - 0{,}1N(t)$, isto é:

$$N(t+2) = 0{,}9\,N(t)$$

Pretende-se, então, resolver a equação:

$$10 + 6\cos\left(\frac{\pi(t+2)}{25}\right) = 0{,}9 \times \left(10 + 6\left(\frac{\pi t}{25}\right)\right)$$

Recorrendo à calculadora gráfica:

$y_1 = 10 + 6\cos\left(\frac{\pi(x+2)}{25}\right)$

$y_2 = 0{,}9\left(10 + 6\left(\frac{\pi x}{25}\right)\right)$

Assim, $t \approx 7{,}73$.