

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

6 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

$\frac{\text{sen} A}{a} = \frac{\text{sen} B}{b} = \frac{\text{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \text{sen} u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$,

- o plano α , de equação $2x + 3y - z - 9 = 0$
- a reta r , de equação vetorial $(x, y, z) = (1, 2, 1) + k(0, 1, 5)$, $k \in \mathbb{R}$

1.1. Seja A o ponto da reta r cuja ordenada é igual a 4

Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

1.2. Seja P o ponto de intersecção da reta r com o plano α

Determine as coordenadas do ponto P

2.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 2.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 2.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

2.1. Lança-se cinco vezes um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4, e regista-se o número da face voltada para baixo.

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da probabilidade de, nos cinco lançamentos, sair face 4 exatamente três vezes?

- (A) 0,01 (B) 0,03 (C) 0,07 (D) 0,09

PMC2015

2.2. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 8

Seja α a amplitude, em graus, do maior ângulo interno desse triângulo.

Qual é o valor de α , arredondado às unidades?

- (A) 75° (B) 100° (C) 120° (D) 125°

3. Um saco contém nove cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 9.

3.1. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro cartões do saco.

Qual é a probabilidade de o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8?

- (A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{1}{21}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{7}$

3.2. Colocam-se os nove cartões em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta.

Determine de quantas maneiras diferentes é possível colocar os cartões, de modo que os números inscritos nos três primeiros cartões sejam primos.

4. Numa turma de 12.^o ano, apenas alguns alunos estão matriculados na disciplina de Química.

Relativamente a essa turma, sabe-se que:

- o número de raparigas é o dobro do número de alunos matriculados na disciplina de Química;
- um terço dos alunos matriculados na disciplina de Química são raparigas;
- metade dos rapazes não estão matriculados na disciplina de Química.

Escolhe-se ao acaso um aluno da turma.

Determine a probabilidade de esse aluno estar matriculado na disciplina de Química.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Na Figura 1, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$, cujo centro coincide com a origem.

Os pontos A , B , C e D são os afixos (imagens geométricas) dos números complexos z_1 , z_2 , z_3 e z_4 , respetivamente.

A que é igual $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$?

- (A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

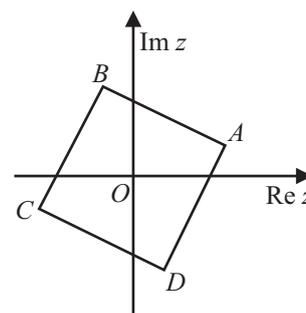


Figura 1

6. Na Figura 2, estão representadas, em referencial o.n. xOy ,

- parte do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

Considere que um ponto A se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico da função g . Para cada posição do ponto A , seja B o ponto do gráfico da função f cuja abscissa é igual à do ponto A

Seja a ($a > 1$) a abscissa comum dos pontos A e B

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de a arredondado às décimas.

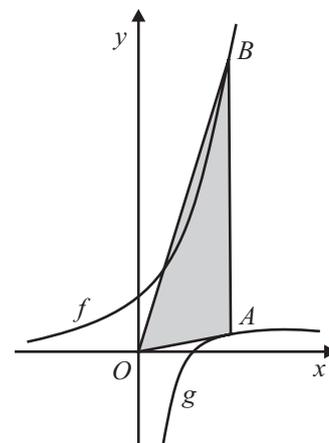


Figura 2

7. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

Determine a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão (u_n) são maiores do que $-0,01$

8. Para um certo número real k , é contínua em \mathbb{R} a função f , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+x-2} & \text{se } x > 1 \\ k & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 2 (B) 3 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	5.	6.	7.	8.	
12	12	8		8	12	13	8	12	12	8	105