Teste de Matemática A

2021 / 2022

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

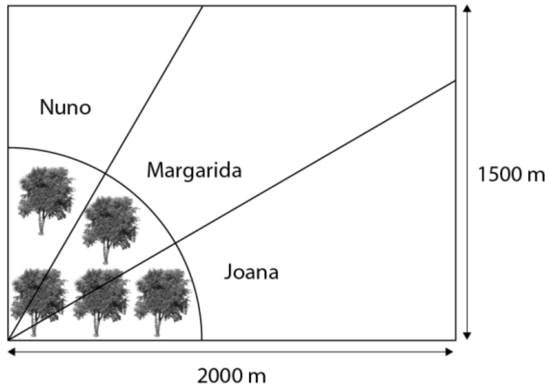
Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. O Nuno, a Margarida e a Joana são três irmãos que pretendem dividir um terreno retangular com 2000 metros de comprimento e 1500 metros de largura. Nesse terreno, existe um pomar que ocupa um quarto de círculo, como se encontra representado na figura ao lado. Para efetuar a divisão, ficou acordado que cada irmão ficava com um terço da área do pomar e que a divisão seria feita como se indica na figura.



Nestas condições, qual é a percentagem de terreno com que o Nuno irá ficar?

Apresente o resultado com aproximação às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. De dois ângulos, de amplitudes α e β, sabe-se que $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ e $\beta \in \left]-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right[$.

Então, pode afirmar-se que:

(A) $\operatorname{sen} \alpha \times \cos \beta > 0$

(B) $\cos \alpha \times \operatorname{tg} \beta > 0$

(C) $\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha < 0$

(D) $\operatorname{sen} \alpha - \cos \beta < 0$

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 4 - 3\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$$

3.1. Determine uma expressão geral dos maximizantes da função f.

3.2. Justifique que $\frac{2\pi}{3}$ é período da função f.

3.3. Qualquer que seja o valor real de x, a expressão $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ é igual a:

(A) $4 - 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$

(B) $8 - 6\cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$

(C) 4

(D) 8

4. Considere $A(x) = \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos^2(2021\pi + x) + \text{sen}(2021\pi + x)$.

A expressão $A(x)$ é igual a:

(A) -1

(B) 1

(C) $1 - 2\text{sen}\, x$

(D) $1 + 2\text{sen}\, x$

5. Seja g a função, de domínio D, definida por:

$$g(x) = \frac{(1 + \text{tg}\, x)^2}{1 + \text{tg}^2 x}$$

5.1. Qual dos seguintes conjuntos pode representar o conjunto D?

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(B) $\mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(D) $\mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

5.2. Prove que, para todo o x onde a igualdade tem significado, se tem $g(x) = (\text{sen}\, x + \cos x)^2$.

6. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica:

$$2\cos x = 1$$

Quantas soluções tem esta equação no intervalo $\left]-\frac{\pi}{4}, 4\pi\right[$?

(A) 5

(B) 4

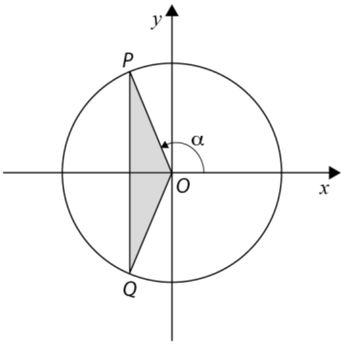
(C) 3

(D) 2

7. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro em O e raio 4 e o triângulo $[OPQ]$.

Sabe-se que a reta PQ é paralela ao eixo Oy.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.



7.1. Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ pode ser dada pela expressão $-16\text{sen}\alpha \cos\alpha$.

7.2. Para uma certa posição do ponto *P*, sabe-se que $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{3}$.

Sem recurso à calculadora, determine, para essa posição do ponto *P*, a área do triângulo $[OPQ]$. Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{N}$.

7.3. Considere, para um certo valor de β, a área do triângulo $[OPQ]$. Sabe-se que, quando esse valor de β duplica, a área do triângulo $[OPQ]$ passa para metade.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de β, sabendo que no intervalo considerado esse valor existe e é único.

Apresente o resultado com aproximação às centésimas.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.

8. Considere a função f definida, em $[0, \pi]$, por:

$$f(x)=\cos x+\cos(2x)$$

Sem recurso à calculadora, determine o valor exato da área do polígono cujos vértices são os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.

FIM

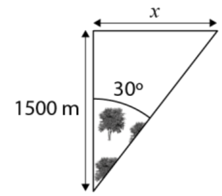
COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.**	**5.1**	**5.2.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**7.3.**	**8.**	
20	10	20	15	10	10	10	20	10	15	20	20	20	**200**

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1. Para que cada irmão fique com um terço da área do pomar, o terreno do Nuno ficará com a forma de um triângulo retângulo com um dos ângulos de amplitude 30º (90º : 3 = 30º).

Assim:



$$\text{tg } 30º = \frac{x}{1500} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{1500} \Leftrightarrow x = \frac{1500\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 500\sqrt{3}$$

Área terreno Nuno $= \frac{500\sqrt{3}\times 1500}{2} = 375\,000\sqrt{3}$ m^2

Área total do terreno $= 1500 \times 2000 = 3\,000\,000$ m^2

Como $\frac{375\,000\sqrt{3}}{3\,000\,000} \approx 0{,}217$, então o Nuno ficará com, aproximadamente, 22% do terreno.

2. Opção (D)

Como $\alpha \in$ 3.º quadrante, então $\text{sen } \alpha < 0, \cos\ \alpha < 0$ e $\text{tg}\ \ \alpha > 0$.

Como $\beta \in$ 1.º quadrante, então $\text{sen } \beta > 0, \cos\ \beta > 0$ e $\text{tg}\ \ \beta > 0$.

Assim:

- $\text{sen } \alpha \times \cos\ \beta < 0$ e a opção (A) é falsa.
- $\cos\ \alpha \times \text{tg}\ \beta < 0$ e a opção (B) é falsa.
- $\text{sen } \beta - \text{sen } \alpha > 0$ e a opção (C) é falsa.
- $\text{sen } \alpha - \cos\ \beta < 0$ e a opção (D) é verdadeira.

3.

3.1. Para todo o valor de x, verifica-se que:

$$-1 \leq \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -3\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 4 - 3\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) \leq 7$$

Assim, $D'_f = [1, 7]$ e o máximo de f é 7.

Logo, os maximizantes de f serão os valores de x que verificam a condição $f(x) = 7$.

$$4 - 3\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = 7 \Leftrightarrow \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = -1 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{13\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{30} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

3.2. $\frac{2\pi}{3}$ é período de f se se verificar $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=4-3\text{sen}\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{5}\right)=4-3\text{sen}\left(3x+2\pi+\frac{\pi}{5}\right)=$$
$$=4-3\text{sen}\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=$$
$$=f(x)$$

Conclui-se, assim, que $\frac{2\pi}{3}$ é período de f.

3.3. Opção (D)

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=4-3\text{sen}\left(3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{5}\right)+4-3\text{sen}\left(3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{5}\right)=$$
$$=8-3\text{sen}\left(3x-\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)-3\text{sen}\left(3x+\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)=$$
$$=8-3\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}+\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)\right)-3\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)\right)=$$
$$=8-3\cos\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)-3\times\left(-\cos\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)\right)=$$
$$=8$$

4. Opção (B)

$$A(x)=\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos^2(2021\pi+x)+\text{sen}(2021\pi+x)=$$
$$=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2+\text{sen}\,x+\left(\cos(2021\pi+x)\right)^2-\text{sen}\,x=$$
$$=(-\text{sen}\,x)^2+(-\cos x)^2=$$
$$=\text{sen}^2x+\cos^2x=$$
$$=1$$

5.

5.1. Opção (C)

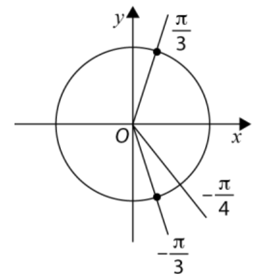
$$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\wedge \underbrace{1+\text{tg}^2x\neq 0}_{\text{condição universal}}\right\}=\mathbb{R}\backslash\left\{x: x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

5.2. $g(x)=\frac{(1+\text{tg}\,x)^2}{1+\text{tg}^2x}=\frac{1+2\text{tg}\,x+\text{tg}^2x}{\frac{1}{\cos^2x}}=\left(1+2\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}+\frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x}\right)\times\cos^2x=$

$$=\cos^2x+2\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\cos^2x+\frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x}\times\cos^2x=$$
$$=\cos^2x+2\text{sen}\,x\cos x+\text{sen}^2x=$$

$$= (\cos x + \operatorname{sen} x)^2 =$$
$$= (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \quad \text{c.q.d.}$$

6. Opção (B)



$2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Em $[0, 4\pi[$, a equação tem 4 soluções e em $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$ a equação não tem soluções.

7.

7.1. Seja R a projeção ortogonal de O sobre PQ.

$P(4\operatorname{sen}\alpha, 4\cos\alpha)$, $Q(4\cos\alpha, -4\operatorname{sen}\alpha)$ e $R(4\cos\alpha, 0)$

Como $4\cos\alpha < 0$ e $4\operatorname{sen}\alpha > 0$, vem que $\overline{OR} = -4\cos\alpha$ e $\overline{PQ} = 2 \times 4\operatorname{sen}\alpha = 8\operatorname{sen}\alpha$. Assim:

$$A_{[OPQ]} = \frac{\overline{PQ} \times \overline{OR}}{2} = \frac{8\operatorname{sen}\alpha \times (-4\cos\alpha)}{2} = -16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

7.2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Assim, a área do triângulo é:

$$-16 \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

7.3. Seja A a área do triângulo $[OPQ]$, para esse valor de β: $A(\beta) = -16\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

Sabe-se que $A(2\beta) = \frac{A(\beta)}{2}$.

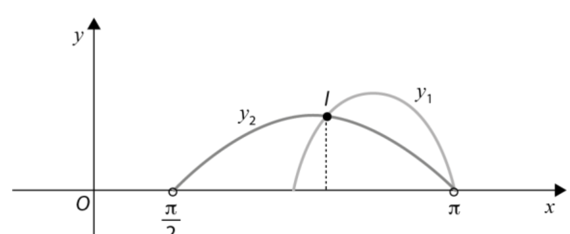
Pretende-se, então, determinar o valor de β tal que $-16\operatorname{sen}(2\beta)\cos(2\beta) = \frac{-16\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{2}$.

Recorrendo à calculadora gráfica:

$y_1 = -16\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)$

$y_2 = -8\operatorname{sen}x\cos x$

$x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$



$I(2{,}48; 3{,}87)$

Assim, $\beta \approx 2{,}48$ rad.

8. Interseção com o eixo Oy:

$f(0) = \cos 0 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

Seja A o ponto de coordenadas (0, 2).

Interseção com o eixo Ox:

$f(x) = 0$

$\cos x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos x \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x)$

$\Leftrightarrow 2x = \pi - x + 2k\pi \ \vee \ 2x = -\pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

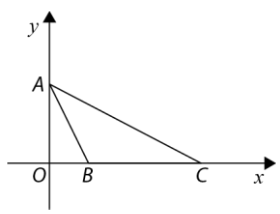
$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \ \vee \ x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ \vee \ x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Em $[0, \pi]$: $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$

Sejam B e C os pontos de coordenadas $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ e $(\pi, 0)$, respetivamente.

O polígono cujos vértices são os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados é um triângulo:



Assim:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{OA}}{2} = \frac{\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \times 2}{2} = \frac{2\pi}{3}$$