Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 11 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice E

Sabe-se que:

- a base da pirâmide está contida no plano xOz
- o vértice A pertence ao semieixo positivo Oz e o vértice B pertence ao semieixo negativo Ox
- o vértice E tem coordenadas $(-2, 6, 2)$
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(-1, 6, 2)$
- o volume da pirâmide é 20

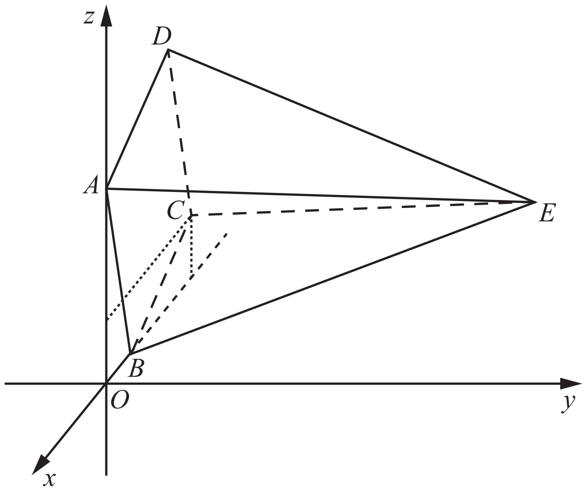


Figura 1

* **1.1.** Seja α o plano perpendicular à reta BE e que passa no ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$

Qual das equações seguintes é uma equação do plano α ?

(A) $-x+6y+2z=0$ **(B)** $x+6y+2z-3=0$

(C) $x-6y-2z+1=0$ **(D)** $2x-y+4z-5=0$

* **1.2.** Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, o arco de circunferência AB, contido no primeiro quadrante do plano cartesiano, cujo centro é a origem do referencial e cujo raio é igual a r $(r>0)$.

O ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto B pertence ao eixo Oy

Seja P um ponto do arco AB, distinto de A e de B, e seja d o comprimento do arco AP

O ponto S pertence ao eixo das ordenadas e tem ordenada igual à do ponto P. O ponto T pertence ao eixo das abcissas e tem abcissa igual à do ponto P

Mostre que uma expressão que dá o valor de $\overline{BS}+\overline{TA}$, em função de d e de r, é

$$r\left(2-\operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right)-\cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

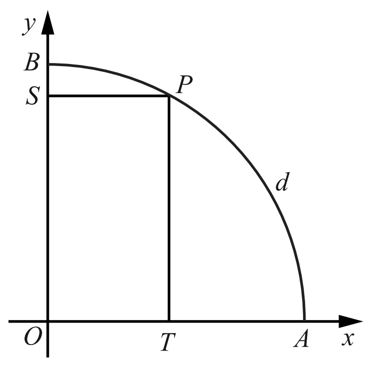


Figura 2

3. Na Figura 3, está representada, a sombreado, num referencial o.n. xOy, a região do plano cartesiano definida pela condição $0 \leq x \leq 10 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 10$

Considere todos os pontos que pertencem a essa região e cujas coordenadas são números inteiros.

Escolhe-se, ao acaso, um desses pontos.

Qual é o valor, arredondado às milésimas, da probabilidade de esse ponto pertencer à reta de equação $y = x + 7$?

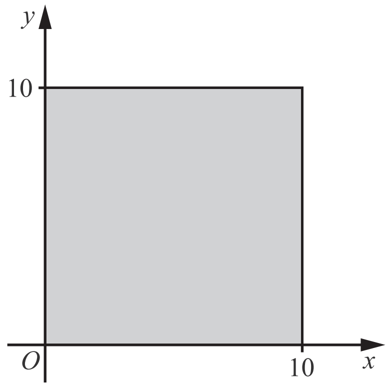


Figura 3

(A) $0{,}025$ **(B)** $0{,}033$

(C) $0{,}041$ **(D)** $0{,}057$

4. A Fernanda tem cinco livros diferentes e sete canetas, também diferentes, para repartir pelos seus dois netos, o Armando e o Catarino.

A Fernanda vai oferecer três livros e três canetas a um dos netos, e os restantes objetos ao outro, ou quatro livros e duas canetas a um dos netos, e os restantes objetos ao outro.

Determine, nestas condições, de quantos modos diferentes pode a Fernanda repartir os doze objetos pelos seus dois netos.

5. Seja Ω, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) \neq 0$
- $P(B) = \frac{3}{2} P(A)$
- $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$

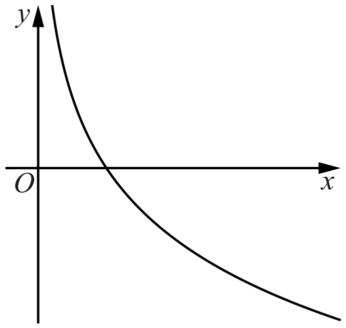
Mostre que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + 2P(A) = 1$

✱ **6.** Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2n^2 - n$

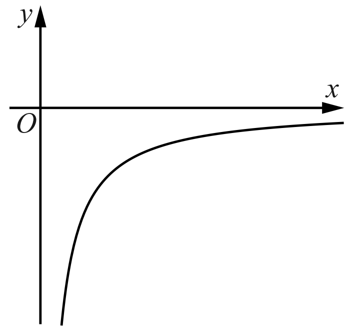
Em relação a uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que $\lim f\left(\frac{1}{u_n}\right) = +\infty$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?

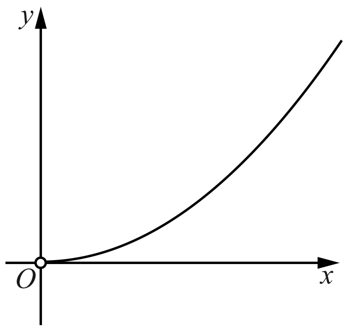
(A)



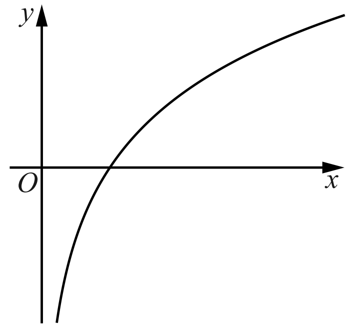
(B)



(C)



(D)



7. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2n + 1$

Determine, sem recorrer à calculadora, a soma dos primeiros duzentos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n)

*** 8.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos z_1 e z_2 tais que, para $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $z_1 = e^{i\theta}$ e $z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)}$

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $z_1 + z_2$?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2i$

Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos z que são solução da equação

$$i z^2 + {z_1}^2 \times \left(\overline{z_2}\right)^3 - 2 = 0$$

Apresente esses números na forma trigonométrica.

10. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 + \ln(3 - 2x) & \text{se} \quad x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1 - x^2} + k & \text{se} \quad x > 1 \end{cases} \qquad (k \text{ é um número real})$$

Resolva os itens **10.1.** e **10.2.** sem recorrer à calculadora.

*** 10.1.** Determine k, sabendo que a função f é contínua em $x = 1$

*** 10.2.** Estude, no intervalo $]-\infty, 1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Seja g a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por

$$g(x) = \log_2(1 - \cos x) + \log_2(1 + \cos x) + 2\log_2(2\cos x)$$

Mostre que $g(x) = 2\log_2\left(\operatorname{sen}(2x)\right)$

12. Para conhecer a variação do número de bactérias de uma determinada estirpe, colocou-se num tubo de ensaio fechado, com alguns nutrientes, um certo número de bactérias dessa estirpe.

Admita que, nessas condições, o número, N, em milhares, de bactérias vivas existentes no tubo, t horas após a sua colocação nesse tubo, é dado por

$$N(t) = N_0\, e^{1{,}08t - 0{,}3t^2}$$

em que N_0 representa a dimensão, em milhares, da população inicial.

*** 12.1.** Com o decorrer do tempo, para que tende o número de bactérias vivas existentes no tubo?

(A) $+\infty$ **(B)** $0{,}78N_0$ **(C)** N_0 **(D)** 0

*** 12.2.** Considere $N_0 = 1{,}63$

Num certo instante, t_1, havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de t_1, sabendo que este valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

13. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{se} \quad x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{x-1}{e^{x-2}} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

14. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que verificam a condição

$$e^{-x}\left(4+e^{2x}\right) \geq 5 \ \wedge \ -2 \leq x \leq 2$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

* **15.** Na Figura 4, estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos das funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x)=2x^2$ e $g(x)=-(x-1)^2$ e a única reta não horizontal que é tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g

Seja A o ponto de tangência dessa reta com o gráfico de f e seja B o ponto de tangência dessa mesma reta com o gráfico de g

Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos A e B

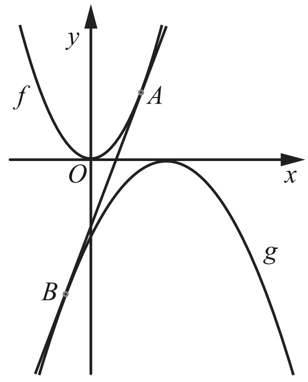


Figura 4

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**12.1.**	**12.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7.**	**9.**	**11.**	**13.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**