Teste de Matemática A

2021 / 2022

Teste N.º 5

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

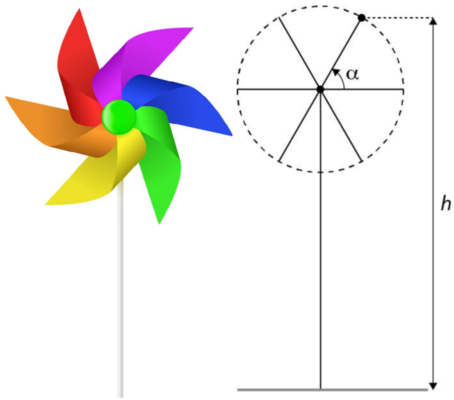
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Uma criança construiu um cata-vento para colocar no seu jardim.

O cata-vento é composto por pás levemente torcidas, como uma hélice, dispostas sobre um suporte que, neste caso, era um espeto de madeira com 40 cm de comprimento.

Durante o movimento circular do cata-vento, a distância h, em centímetros, da extremidade de uma pá ao solo, em função da amplitude α, em radianos, do ângulo orientado que essa pá faz com a horizontal durante uma volta, é dada por:



$$h(\alpha) = 40 + 11\,\text{sen}(\alpha),\ \alpha \in [0, 2\pi]$$

1.1. Qual é o diâmetro, em centímetros, da circunferência descrita pela extremidade de uma pá numa volta?

(A) 11 **(B)** 20 **(C)** 22 **(D)** 40

1.2. Determine o valor da taxa de variação média da função h no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ e interprete-o no contexto descrito. Apresente o valor da taxa de variação média arredondado às décimas. Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

1.3. Considere, para um certo valor de θ, pertencente ao intervalo $[0, \pi]$, a altura da extremidade de uma pá ao solo. Sabe-se que, quando esse valor de θ aumenta meio radiano, a altura da pá ao solo aumenta 2 centímetros.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de θ, sabendo que, no intervalo considerado, esse valor existe e é único.

Apresente o resultado com aproximação às centésimas.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.

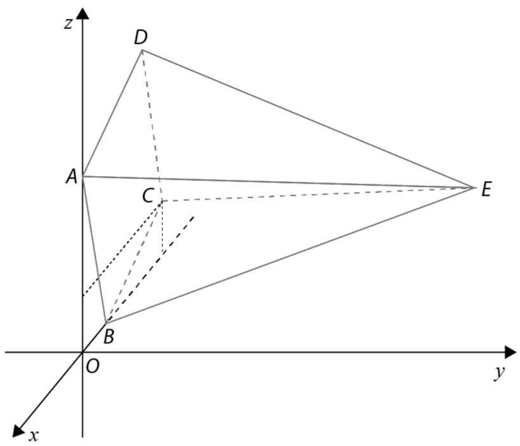
2. Considere um triângulo isósceles $[ABC]$, do qual se sabe que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{3}$
- $B\hat{A}C = 67{,}5°$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$?

(A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **(C)** $3\sqrt{2}$ **(D)** $-3\sqrt{2}$

3. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice E.



Sabe-se que:

- a base da pirâmide está contida no plano xOz;
- o vértice A pertence ao semieixo positivo Oz;
- o vértice B pertence ao semieixo negativo Ox;
- o vértice E tem coordenadas $(-2, 5, 2)$;
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(-1, 5, 2)$;
- o volume da pirâmide é 30.

3.1. Qual das condições define a esfera de centro em E e tangente ao plano xOy?

(A) $(x-2)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 \leq 2$

(B) $(x-2)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 \leq 4$

(C) $(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 \leq 2$

(D) $(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 \leq 4$

3.2. Determine uma equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta $[BE]$.

3.3. Sem recorrer à calculadora, determine as coordenadas do ponto A.

4. Seja f a função real de variável real definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}, & x < 0 \\ 2\sqrt{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n^2+2}{-n^3+3}$.

A que é igual $\lim f(u_n)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

5. Para um determinado número real a, tem-se que $a+4$, $a+1$ e $-a+\frac{7}{2}$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica (v_n).

Sabe-se que (v_n) é monótona decrescente.

Determine, recorrendo a processos analíticos, a razão da progressão.

6. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x-5}{x-4}$.

Resolva as seguintes alíneas, recorrendo a processos exclusivamente analíticos.

6.1. Determine para que valores reais de x as ordenadas dos pontos do gráfico de f são superiores às respetivas abcissas.

6.2. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'(1)$.

6.3. Considere o gráfico da função f, representado num referencial o.n. Oxy, e sejam r e s as assíntotas, respetivamente horizontal e vertical, ao gráfico de f.

Sejam A o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox e B o ponto de interseção das retas r e s.

Determine o valor exato da área do triângulo $[OAB]$.

7. De uma função g, diferenciável em todo o seu domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a inclinação da reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa 2 é $45°$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{4-x^2}$?

(A) $-\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** -1 **(D)** 1

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.1.**	**3.2**	**3.3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	
10	20	20	10	10	20	20	10	15	20	15	20	10	**200**

TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (C)

raio $= h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h(0) =$

$= 40 + 11\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 40 =$

$= 40 + 11 - 40 =$

$= 11$

Logo, diâmetro = 22 cm.

1.2. $\text{t.v.m.}_{\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]} = \frac{h\left(\frac{\pi}{3}\right)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}} =$

$= \frac{40+11\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\left(40+11\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\frac{\pi}{12}} =$

$= \frac{40+11\times\frac{\sqrt{3}}{2}-40-11\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{12}} =$

$= \frac{\frac{11}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\frac{\pi}{12}} =$

$= \frac{66(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\pi} \approx 6{,}7$

A taxa de variação média é 6,7 cm/rad, o que significa que, quando a amplitude do ângulo α varia de $\frac{\pi}{4}$ rad para $\frac{\pi}{3}$ rad, a altura da extremidade da pá ao solo aumenta, em média, 6,7 cm por radiano.

1.3. Seja $h(\theta) = 40 + 11\text{sen}\,\theta$.

Sabe-se que $h(\theta + 0{,}5) = h(\theta) + 2$.

Pretende-se, então, determinar o valor de θ tal que $40 + 11\text{sen}\,(\theta + 0{,}5) = 40 + 11\text{sen}\,\theta + 2$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:

$x \in [0, \pi]$

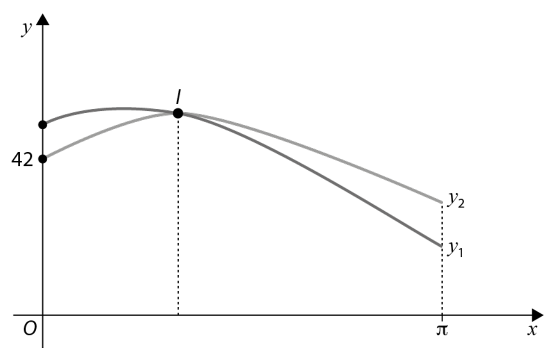
$y_1 = 40 + 11\text{sen}\,(x + 0{,}5)$

$y_2 = 42 + 11\text{sen}\,x$

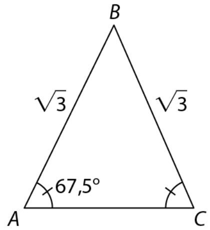
Seja I o ponto de interseção.

As coordenadas de I são $(0{,}94;\ 50{,}91)$.

Assim, $\theta \approx 0{,}94$.



2. Opção (B)



$A\hat{B}C$ = 180º – 2 × 67,5º = 45º

$$\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}\,.\left(-\overrightarrow{BC}\right) = -\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(A\hat{B}C\right) =$$
$$= -\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \cos\,(45^{\circ}) =$$
$$= -3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.

3.1. Opção (D)

Sendo a esfera tangente ao plano xOy e de centro em E, o seu raio é a cota do ponto E, isto é, 2.

Assim, uma condição que define a esfera é:

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 \leq 2^2$$

3.2. Seja α o plano mediador do segmento de reta [*BE*].

O vetor $\overrightarrow{BE}$, de coordenadas $(-1, 5, 2)$, é um vetor normal ao plano α, logo uma equação do plano α é da forma $-x + 5y + 2z + d = 0, d \in \mathrm{IR}$.

$B = E + \overrightarrow{EB} = (-2{,}5{,}2) + (1, -5, -2) = (-1{,}0{,}0)$

Seja M o ponto médio de [*BE*]:

$$M = \left(\frac{-1+(-2)}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$$

Como $M \in$ α, vem que:

$$-\left(-\frac{3}{2}\right) + 5 \times \frac{5}{2} + 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{25}{2} + 2 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = -16$$

Assim, uma equação de α é $-x + 5y + 2z - 16 = 0$.

3.3. Seja a o lado do quadrado $[ABCD]$, base da pirâmide.

Sabemos que o volume da pirâmide é 30 e que a sua altura é a ordenada do ponto *E*, isto é, 5.

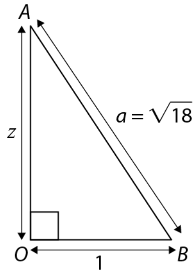
Assim:

$$30 = \frac{1}{3} \times a^2 \times 5 \Leftrightarrow a^2 = \frac{90}{5} \Leftrightarrow a^2 = 18$$

Logo, $a = \sqrt{18}$, pois $a > 0$.

Como A pertence ao semieixo positivo Oz, as coordenadas de A são da forma $(0, 0, z), z \in \mathrm{IR}^+$.

Da alínea anterior, tem-se que as coordenadas de B são $(-1,0,0)$.



$$z^2 + 1^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2 \Leftrightarrow z^2 = 17$$

Logo, $z = \sqrt{17}$ e, assim, $A(0,0,\sqrt{17})$.

4. Opção (B)

$$\lim u_n = \lim \frac{n^2+2}{-n^3+3} = \lim \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(-1+\frac{3}{n^3}\right)} = \lim \frac{1+\frac{2}{n^2}}{n\left(-1+\frac{3}{n^3}\right)} =$$

$$= \frac{1+0}{+\infty \times (-1+0)} =$$

$$= \frac{1}{-\infty} =$$

$$= 0^-$$

Assim, $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x^2+1} = 1$.

5. Como $a+4, a+1$ e $-a+\frac{7}{2}$ são três termos de uma progressão geométrica, então:

$$\frac{a+1}{a+4} = \frac{-a+\frac{7}{2}}{a+1} \Leftrightarrow (a+1)^2 = (a+4) \times \left(-a+\frac{7}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 = -a^2 + \frac{7}{2}a - 4a + 14$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + \frac{5}{2}a - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 5a - 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 4 \times (-26)}}{2 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{441}}{8}$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \ \vee \ a = -\frac{13}{4}$$

Se $a = 2$, os três termos são $2+4$, $2+1$ e $-2+\frac{7}{2}$, ou seja, 6, 3 e $\frac{3}{2}$, o que é possível, pois (v_n) é monótona decrescente.

Se $a = -\frac{13}{4}$, os três termos são $-\frac{13}{4}+4$, $-\frac{13}{4}+1$ e $\frac{13}{4}+\frac{7}{2}$, ou seja, $\frac{3}{4}$, $-\frac{9}{4}$ e $\frac{27}{4}$, o que não é possível, pois assim (v_n) não seria monótona.

Assim, $a = 2$ e a razão de (v_n) é $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ou seja, $\frac{1}{2}$.

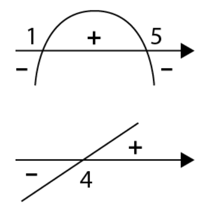
6.

6.1. Pretende-se determinar os valores de x para os quais se verifica $f(x) > x$:

$$\frac{2x-5}{x-4} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5-x^2+4x}{x-4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+6x-5}{x-4} > 0$$

x	$-\infty$	1		4		5	$+\infty$
$-x^2+6x-5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x^2+6x-5}{x-4}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	0	$-$



Cálculos auxiliares

- $-x^2+6x-5=0 \Leftrightarrow x = \frac{-6\pm\sqrt{36-4\times(-1)\times(-5)}}{2\times(-1)}$

  $\Leftrightarrow x = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{-2}$

  $\Leftrightarrow x = 1 \lor x = 5$

- $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$

Assim, verifica-se que $f(x) > x$ para os valores de $x \in]-\infty, 1[\cup]4, 5[$.

6.2. $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{2x-5}{x-4}-\frac{2-5}{1-4}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{2x-5}{x-4}-1}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x-5-x+4}{x-4}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-4)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-4} =$$

$$= -\frac{1}{3}$$

6.3. $f(x) = \frac{2x-5}{x-4} = 2 + \frac{3}{x-4}$

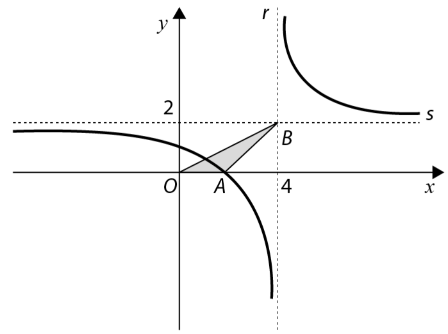
Sabemos que a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f é $y=2$ e que a equação da assíntota vertical ao gráfico de f é $x=4$.

Cálculo auxiliar

$2x-5$	$x-4$
$-2x+8$	2
3	

Assim, as coordenadas do ponto B são (4, 2), já que B é o ponto de interseção das duas assíntotas.

As coordenadas do ponto *A* são $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, pois *A* é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox:



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-4} = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \ \wedge x - 4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \ \wedge x \neq 4$$

Assim, a área do triângulo [*OAB*] pode ser dada por $\frac{\frac{5}{2} \times 2}{2} = \frac{5}{2}$.

7. Opção (A)

Seja m o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 2.

Tem-se que $g'(2) = m$ e $m = \text{tg}\, 45^\circ$, ou seja, $m = 1$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{g(x) - g(2)}{-(x-2)} \times \frac{1}{2+x} \right) =$$

$$= -\underbrace{\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}}_{g'(2)} \times \lim_{x \to 2} \frac{1}{2+x} =$$

$$= -g'(2) \times \frac{1}{2+2} =$$

$$= -1 \times \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{1}{4}$$