Teste N.º 5

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ______________________________________ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base;

g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\,\cos b+\operatorname{sen} b\,\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\,\cos b-\operatorname{sen} a\,\operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n=\rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k\in\{0,\dots,n-1\}$ e $n\in\mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(u.v)'=u'.v+u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,.u^{n-1}.u'$ ($n\in\mathbb{R}$)

$(\operatorname{sen} u)'=u'.\cos u$

$(\cos u)'=-u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'.e^u$

$(a^u)'=u'.a^u.\ln a$ ($a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$)

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\,.\ln a}$ ($a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$)

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ ($n\in\mathbb{N}$)

$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty$ ($p\in\mathbb{R}$)

1. Numa turma de 12.º ano, nem todos os alunos estão inscritos no exame de Matemática A.

Relativamente a essa turma, sabe-se que:

- o número de raparigas é metade do número de alunos que estão inscritos no exame de Matemática A;
- um terço dos alunos inscritos no exame de Matemática A são raparigas;
- em cada sete rapazes, três não estão inscritos no exame de Matemática A.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno da turma.

Determine a probabilidade de esse aluno ser um rapaz e estar inscrito no exame de Matemática A. Apresente o resultado na forma de percentagem.

2. Um saco contém nove cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 9.

2.1. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro cartões do saco.

Qual é a probabilidade de a soma dos números saídos ser par?

(A) $\frac{61}{126}$ **(B)** $\frac{65}{126}$ **(C)** $\frac{10}{21}$ **(D)** $\frac{11}{21}$

2.2. Colocam-se os nove cartões em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta.

Determine a probabilidade de, ao colocar os cartões, números que não sejam primos não ficarem em posições consecutivas. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Seja g a função, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $g(x) = 4x + 2\cos x + \cos^2 x$.

Resolva os itens seguintes, recorrendo a processos exclusivamente analíticos.

3.1. Considere o gráfico da função g representado num referencial o.n. Oxy.

Considere:

- A o ponto do gráfico de g de abcissa 0;
- r a reta tangente ao gráfico de g em A;
- s a reta perpendicular à reta r em A;
- B e C os pontos de interseção, respetivamente, da reta r e da reta s com o eixo das abcissas.

Determine o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

3.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;
- as abcissas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x \times \cos x$.

Sem recorrer à calculadora, prove que a equação $f(x) + 4 \times f'(x) = -f''(x)$ é possível no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

5. Para um determinado número real positivo k, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-2}}{x^2 + 3x + 2} & \text{se} \quad x < -2 \\ \log k & \text{se} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 \ln x + e^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

5.1. Seja a um número real positivo. Para qualquer valor de $a,$ qual das expressões pode representar a taxa média de variação da função f no intervalo $[a, 2a]$?

(A) $3a \ln (16a)$

(B) $a \ln (16a^3)$

(C) $a \ln (4a^3)$

(D) $\ln (16a^4)$

5.2. Averigue se existe algum valor real k tal que a função f seja contínua em $x = -2$.

Em caso afirmativo, indique esse valor.

5.3. Estude, no intervalo $]0, +\infty[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso exista(m), esse(s) extremo(s).

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

6. Seja k um número real.

Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{kn}$.

Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $e^{-\ln\left(\frac{e}{x}\right)} = \frac{1}{e^2}$.

Qual é o valor de k?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

7. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da inequação:

$$2x \geq \ln(3e^x - 2)$$

Apresente o resultado sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

8. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)+\ln x}{2x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - f(x) - \frac{x^2}{e^x}\right) = -1$

Qual das equações seguintes pode representar a assíntota oblíqua ao gráfico de f?

(A) $y = 2x - 1$

(B) $y = -2x + 1$

(C) $y = 2x + 1$

(D) $y = -2x - 1$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\alpha} \quad \text{e} \quad z_3 = 2\sqrt{2}e^{i(\alpha+\pi)}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

9.1. Determine, sem recorrer à calculadora, os valores de α que satisfazem a condição:

$$\overline{z_2} = z_2 \times z_1$$

9.2. Considere agora que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $z_2 + z_3$?

(A) Primeiro

(B) Segundo

(C) Terceiro

(D) Quarto

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**Total**
16	10	16	17	17	17	10	17	17	10	17	10	16	10	**200**

TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

Consideremos os seguintes acontecimentos:

F: "Ser do sexo feminino."

V: "Estar inscrito no exame de Matemática A."

Sabe-se que:

- $P(F)=\frac{1}{2}P(M)$
- $P(F|M)=\frac{1}{3}$
- $P(\overline{M}|\overline{F})=\frac{3}{7}$

Então:

$$P(F|M)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{P(F\cap M)}{P(M)}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(F\cap M)=\frac{1}{3}P(M)$$

$$P(\overline{M}|\overline{F})=\frac{3}{7}\Leftrightarrow\frac{P(\overline{M}\cap\overline{F})}{P(\overline{F})}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow P(\overline{M}\cap\overline{F})=\frac{3}{7}P(\overline{F})$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{M}\cap\overline{F})=\frac{3}{7}\left(1-\frac{1}{2}P(M)\right)$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{M}\cap\overline{F})=\frac{3}{7}-\frac{3}{14}P(M)$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{M\cup F})=\frac{3}{7}-\frac{3}{14}P(M)$$

$$\Leftrightarrow 1-P(M\cup F)=\frac{3}{7}-\frac{3}{14}P(M)$$

$$\Leftrightarrow 1-P(M)-P(F)+P(M\cap F)+\frac{3}{14}P(M)=\frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow 1-P(M)-\frac{1}{2}P(M)+\frac{1}{3}P(M)+\frac{3}{14}P(M)=\frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{20}{21}P(M)=-\frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow P(M)=\frac{3}{5}$$

$$P(F\cap M)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$$

$$P(\overline{F}\cap M)=P(M)-P(F\cap M)=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

Logo, a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz e estar inscrito no exame de Matemática A é $\frac{2}{5}$, ou seja, 40%.

2.

2.1. Opção (D)

Número de casos possíveis: ${}^9C_4$

Número de casos favoráveis: $\underbrace{{}^4C_4}_{\substack{\text{saírem 4}\\ \text{números}\\ \text{pares}}} + \underbrace{{}^4C_2 \times {}^5C_2}_{\substack{\text{saírem 2 números}\\ \text{pares e}\\ \text{2 números ímpares}}} + \underbrace{{}^5C_4}_{\substack{\text{saírem 4}\\ \text{números}\\ \text{ímpares}}}$

A probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{{}^4C_4 + {}^4C_2 \times {}^5C_2 + {}^5C_4}{{}^9C_4} = \frac{11}{21}$$

2.2. Número de casos possíveis: 9!

Número de casos favoráveis: $\underline{\overline{P}}\ \ \underline{P}\ \ \underline{\overline{P}}\ \ \underline{P}\ \ \underline{\overline{P}}\ \ \underline{P}\ \ \underline{\overline{P}}\ \ \underline{P}\ \ \underline{\overline{P}}$

$5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1$

A probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{5! \times 4!}{9!} = \frac{1}{126}$$

3.

3.1. $A(0, g(0)) = (0, 0 + 2\cos 0 + \cos^2 0) = (0, 3)$

$r: y = mx + b$ onde $m = g'(0)$

$g'(x) = (4x + 2\cos x + \cos^2 x)' =$

$= 4 + 2 \times (\cos x)' + 2\cos x \times (\cos x)' =$

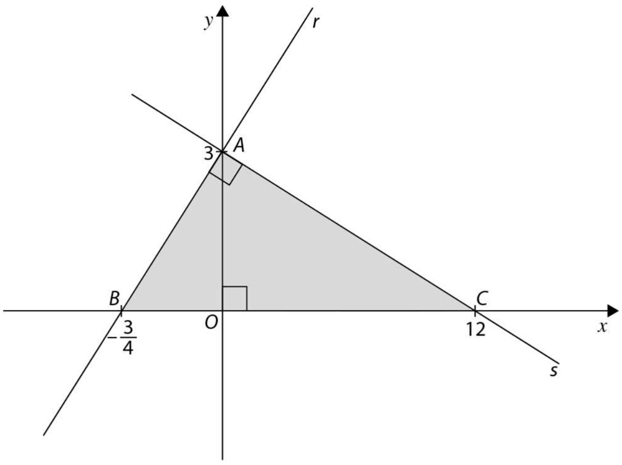
$= 4 - 2 \times \operatorname{sen} x - 2\cos x \operatorname{sen} x$

$g'(0) = 4 - 2\operatorname{sen} 0 - 2\cos 0 \operatorname{sen} 0 = 4$

$r: y = 4x + b$

Como $A \in r$, vem que $b = 3$. Assim, $r: y = 4x + 3$.

$s: y = -\frac{1}{4}x + 3$, pois $m_s = -\frac{1}{m_r}$.



B é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox, logo:

$0 = 4x + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$ $\quad B\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

C é o ponto de interseção da reta s com o eixo Ox, logo:

$0 = -\frac{1}{4}x + 3 \Leftrightarrow x = 12$ $\quad C(12, 0)$

Assim:

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{OA}}{2} = \frac{\left(12+\frac{3}{4}\right)\times 3}{2} = \frac{153}{8}$

3.2. Seja g a função, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $g(x) = 4x + 2\cos x + \cos^2 x$.

Tem-se que:

$g'(x) = 4 - 2\text{sen}x - 2\cos x \text{ sen}x = 4 - 2\text{sen}x - \text{sen}(2x)$

$g''(x) = -2\cos x - 2\cos(2x)$

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow -2\cos x - 2\cos(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\cos x = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \cos(\pi + x) = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \pi + x = 2x + 2k\pi \quad \vee \quad \pi + x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \pi + 2k \qquad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $x \in]-\pi, \pi[$, vem que $x = -\frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{3}$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
Sinal de g''	n.d.	+	0	−	0	+	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪	n.d.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right[$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$; tem dois pontos de inflexão de abcissas $x = -\frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{3}$.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}\, x \times \cos x$.

$$\begin{aligned} f'(x) = (\text{sen}\, x)' \times \cos x + \text{sen}\, x \times (\cos x)' &= \cos x \times \cos x - \text{sen}\, x \times \text{sen}\, x = \\ &= \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos(2x) \end{aligned}$$

$f''(x) = (\cos(2x))' = -2\,\text{sen}(2x)$

$$\begin{aligned} f(x) + 4 \times f'(x) = -f''(x) &\Leftrightarrow \underbrace{f(x) + 4 \times f'(x) + f''(x)}_{g(x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\text{sen}x \times \cos x + 4\cos(2x) - 2\,\text{sen}(2x)}_{g(x)} = 0 \end{aligned}$$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \text{sen}\, x \times \cos x + 4\cos(2x) - 2\,\text{sen}(2x)$.

- g é continua por se tratar da soma de funções contínuas. Em particular, g é continua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.
- $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - 2\,\text{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$

  $= \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

  $= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 - \sqrt{3} =$$

$$= \frac{8-3\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{8-\sqrt{27}}{4}$$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$, pois $\sqrt{64} > \sqrt{27}$, isto é, $8 > \sqrt{27}$.

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - 2\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times 0 - 2 \times 1 =$$

$$= \frac{1}{2} - 2 =$$

$$= -\frac{3}{2} \; (< 0)$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[: g(c) = 0$$

isto é:

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[: f(c) + 4 \times f'(c) + f''(c) = 0$$

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[: f(c) + 4 \times f'(c) = -f''(c)$$

Logo, a equação $f(x) + 4 \times f'(x) = -f''(x)$ é possível no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

5.

5.1. Opção (B)

$$\text{t.m.v.}_{[a,2a]} = \frac{f(2a)-f(a)}{2a-a} = \frac{(2a)^2\ln(2a)+e^2-(a^2\ln a+e^2)}{a} =$$

$$= \frac{4\,a^2\ln(2a)+e^2-a^2\ln a-e^2}{a} = \frac{4\,a^2\ln(2a)-a^2\ln a}{a} =$$

$$= 4a\ln(2a) - a\ln a = a(4\ln(2a) - \ln a) = a(\ln(2a)^4 - \ln a) =$$

$$= a\ln\left(\frac{(2a)^4}{a}\right) =$$

$$= a\ln\left(\frac{16\,a^4}{a}\right) = a\ln(16\,a^3)$$

5.2. f é contínua em $x=-2$ se e só se existir $\lim_{x\to -2} f(x)$, isto é:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$$

- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{e^x - e^{-2}}{x^2+3x+2} =$

  $= \lim_{x\to -2^-} \frac{e^{-2}(e^{x+2}-1)}{(x+2)(x+1)} =$

  $= e^{-2} \times \lim_{x\to -2^-} \frac{e^{x+2}-1}{x+2} \times \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+1} =$

  Considerando a mudança de variável $y = x+2$;

  $x \to -2^- \Rightarrow y \to 0^-$:

  $= e^{-2} \times \lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} \times \frac{1}{-2+1} =$

  $= e^{-2} \times 1 \times (-1) =$

  $= -e^{-2}$

Cálculo auxiliar

$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times2}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=-1$

- $\lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) = \log k$

  Assim, $\log k = -e^{-2} \Leftrightarrow k = 10^{-e^{-2}}$

  Ou seja, existe um valor real k tal que a função f é contínua em $x=-2$: $k = 10^{-e^{-2}}$.

5.3. Em $]0,+\infty[$:

$f'(x) = (x^2 \ln x + e^2)' = (x^2)' \times \ln x + x^2 \times (\ln x)' + 0 =$

$= 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln x + x =$

$= x\,(2\ln x + 1)$

$f'(x) = 0$

$x\,(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; 2\ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; \ln x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\notin]0,+\infty[} \;\vee\; x = e^{-\frac{1}{2}}$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
x	n. d.	$+$	$+$	$+$
$2\ln x + 1$	n. d.	$-$	0	$+$
Sinal de f'	n. d.	$-$	0	$+$
Variação de f	n. d.	$\searrow$	mín. $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\nearrow$

Cálculo auxiliar

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) + e^2 = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^{-1}}{2} + e^2 = e^2 - \frac{1}{2e}$

$e^2 - \frac{1}{2e}$ é mínimo relativo em $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

f é estritamente decrescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e é estritamente crescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$.

6. Opção (C)

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{kn} = \lim \left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right]^{kn} = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{kn}} =$$

$$= \lim \frac{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k}{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right]^k} =$$

$$= \frac{e^k}{e^{2k}} =$$

$$= e^{-k}$$

Como e^{-k} é solução da equação $e^{-\ln\left(\frac{e}{x}\right)} = \frac{1}{e^2}$, então:

$$e^{-\ln\left(\frac{e}{e^{-k}}\right)} = \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{e^{-k}}{e}\right)} = e^{-2} \Leftrightarrow e^{-k-1} = e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -k - 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

7. $D = \{x \in \mathrm{IR}: 3e^x - 2 > 0\} = \left]\ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$

Cálculo auxiliar

$3e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 3e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Em $\left]\ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$:

$$2x \geq \ln(3e^x - 2) \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) \geq \ln(3e^x - 2) \Leftrightarrow e^{2x} \geq 3e^x - 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0$$

Consideremos a mudança de variável $e^x = y$:

$y^2 - 3y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1 \ \vee \ y \geq 2$

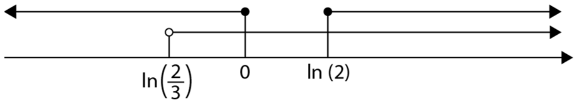
Cálculo auxiliar

$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{3 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow y = 2 \ \vee \ y = 1$

Substituindo y por e^x, vem:

$e^x \leq 1 \ \vee \ e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 0 \ \vee \ x \geq \ln(2)$



C.S. $= \left]\ln\left(\frac{2}{3}\right), 0\right] \cup [\ln(2), +\infty[$

8. Opção (C)

Seja $y = mx + b$ a equação da assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) + \ln(x)}{2x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) + \ln(x)}{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}}_{\text{limite notável}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + 0 = 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}}_{m} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x - f(x) - \frac{x^2}{e^x}\right) = -1 \Leftrightarrow -\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - 2x + \frac{x^2}{e^x}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) + \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{limite notável}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) + \frac{1}{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) + 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x)}_{b} = 1$$

9.

9.1. $\overline{z_2} = z_2 \times z_1 \Leftrightarrow \overline{\sqrt{2}e^{i\alpha}} = \sqrt{2}e^{i\alpha} \times e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}e^{i(-\alpha)} = \sqrt{2}e^{i\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha = \alpha + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Cálculo auxiliar

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

Seja θ um argumento de z_1:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta \in 3.^{\text{º}}\,\text{Q, logo } \theta = \frac{4\pi}{3} \text{ (por exemplo)}$$

9.2. Opção (D)

$$z_2 + z_3 = \sqrt{2}e^{i\alpha} + \underbrace{2\sqrt{2}e^{i(\alpha+\pi)}}_{\text{simétrico de } 2\sqrt{2}e^{i\alpha}} = \sqrt{2}e^{i\alpha} + \left(-2\sqrt{2}e^{i\alpha}\right) =$$

$$= -\sqrt{2}e^{i\alpha} =$$

$$= \sqrt{2}e^{i(\alpha+\pi)}$$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então $\alpha + \pi \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, isto é, o afixo de $z_2 + z_3$ pertence ao 4.º quadrante.